Université de Caen
U.F.R. Sciences

Année universitaire 2007 - 2008
semestre 5

Licence 3 Mathématiques

Espaces métriques, TD n° 8

Exercice I

Pour $P(X) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i \in \mathbb{R}[x]$, on pose $\|P\| = \sum_{i=0}^{k} |a_i|$. On rappelle que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}[x]$.

1. Montrer que $(\mathbb{R}[x], \|\cdot\|)$ n'est pas un espace de Banach.
2. Montrer que si $(P_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}[x]$ qui ne converge pas, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \deg(P_n) = +\infty.$$

Exercice II

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions lipschitziennes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout f dans E, on pose

$$\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\neq y} \left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right|.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.
2. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy de E. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction continue $f\ : [0,1] \to \mathbb{R}$.
3. Montrer que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

Exercice III

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs réelles. On munit E de la norme de la convergence uniforme et $\mathbb{R}$ de la valeur absolue usuelle.

1. L'application $\phi : E \to \mathbb{R}$ par $\phi(f) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ est-elle continue ?
2. Soit T une forme linéaire sur E vérifiant, pour tout f dans E :

$$\big(\forall x \in [0,1],\ f(x) \geq 0\big) \Rightarrow T(f) \geq 0.$$

   Montrer que T est continue (considérer les applications $g : x \mapsto \|f\| - f(x)$ et $h : x \mapsto \|f\| + f(x)$).

Exercice IV

Calculer la norme des applications linéaires suivantes :

1. $f_1 : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|), \quad (x,y) \mapsto 2x + 3y.$
2. $f_2 : (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}, |\cdot|), \quad (x,y,z) \mapsto \pi x + y - \pi z.$
3. $f_3 : (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty), \quad (x,y,z) \mapsto (x+y, y+z).$
4. $f_4 : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1), \quad (x,y) \mapsto (x+y, x-y).$

Exercice V

On munit $\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ de la norme infinie. Calculer les normes des formes linéaires sur $\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ suivantes :

1. $f \mapsto \int_0^1 f(x)dx$;
2. $f \mapsto \int_{-1}^1 \text{signe}(x)f(x)dx$;
3. $f \mapsto \frac{f(a)+f(-a)-2f(0)}{a^2}$, où $a \in]0,1]$ est une constante ;
4. $f \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} f\left(\frac{1}{n}\right)$

Exercice VI

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On considère sur $\mathbb{R}[x]$ l'application $\|\cdot\| : P \mapsto \sup_{a\in A} |P(a)|$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\|\cdot\|$ soit une norme sur $\mathbb{R}[x]$.
2. On suppose maintenant que la condition de la question précédente est vérifiée. Montrer que l'application
$$\begin{array}{rccc} \phi : & (\mathbb{R}[x], \|\cdot\|) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ & P & \longmapsto & P(0) \end{array}$$
est continue si et seulement si 0 appartient à l'adhérence de A.
(On pourra considérer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme $(M^2 - X^2)^n$ pour un M bien choisi.)
3. On suppose ici $A = [0,1]$. L'application linéaire $\psi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ définie par $P \mapsto P'(1)$ est-elle continue ?

Exercice VII

Soient $\mathcal{C}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles convergentes et $\mathcal{C}_0$ le sous-espace des suites convergentes vers 0. On munit $\mathcal{C}$ de la norme infinie.

1. Montrer que $\mathcal{C}_0$ est fermé dans $\mathcal{C}$.
2. Pour tout élément $\mathbf{x} := (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{C}$, on note x_∞ sa limite. On considère l'application :
$$\begin{array}{rccc} T : & \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{C}_0 \\ & \mathbf{x} & \longmapsto & \mathbf{y} := (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$
où $y_0 = x_\infty$ et $y_n = x_{n-1} - x_\infty$, pour tout $n \geq 1$.
   (a) Montrer que T est linéaire et continue, et calculer sa norme $|||T|||$.
   (b) Montrer que T est bijective.
   (c) Montrer que T^{-1} est continue.

Exercice VIII

Soit E une algèbre unitaire et commutative. On note e l'unité de E pour la multiplication. On suppose que $(E, \|\|)$ un espace de Banach (c'est-à-dire un espace vectoriel normé complet) vérifiant $\|fg\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$ pour f et g dans E, et $\|e\| = 1$. On note U l'ensemble des inversibles de E.

1. (a) Soit y dans U et h dans E tel que $\|h\| < \frac{1}{\|y^{-1}\|}$. Montrer que la suite
$$\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (y^{-1}h)^k\right)_{n\geq 0}$$
converge dans E.
   (b) Montrer que $e + y^{-1}h$ est inversible.
   (c) Montrer que U est ouvert dans E.