Université de Caen
U.F.R. Sciences

Année universitaire 2007 - 2008
semestre 5

Licence 3 Mathématiques

Espaces métriques, TD n° 7-bis

Exercice I

Soient $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ une application continue. Montrer que f possède un point fixe.

Exercice II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices de taille $n \times n$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, c'est-à-dire si $A(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ alors

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|.$$

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives et $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles orthogonales (on rappelle que ce dernier est compact).

1. Montrer que le complémentaire de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) est connexe par arcs.
2. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.
3. Montrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est convexe non fermé.
4. Montrer que $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice III

Soit f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x,y \in [a,b], \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\Big(f(x)+f(y)\Big).$$

1. On suppose $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que f est, sur $]a,b[$, soit à valeurs dans $]-\infty,0[$, soit identiquement nulle (on pourra considérer l'ensemble $\Big\{x \in]a,b[\mid f(x) = \sup_{t\in[a,b]} f(t)\Big\}$).
2. Montrer que f est convexe ; on pourra pour cela considérer l'application définie sur $[0,1]$ par

$$g : t \mapsto f\Big((1-t)a+tb\Big) - \Big((1-t)f(a)+tf(b)\Big).$$

Exercice IV

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application surjective continue. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$ l'ensemble $f^{-1}(\{a\})$ n'est pas borné (indication : le complémentaire d'une boule de $\mathbb{R}^2$ est connexe).

Exercice V

Soit (E, d) un espace métrique connexe. Montrer que si E contient au moins deux points, alors il contient une infinité non dénombrable de points (indication : étant donné un point x_0 de E, on pourra considérer l'application $x \mapsto d(x_0, x)$ de E dans $\mathbb{R}$).

Exercice VI

1. Montrer que dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas connexe.

Dans $\mathbb{R}^2$ on considère l'ensemble A des points dont une coordonnée au moins est irrationnelle.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; décrire l'ensemble $A \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \alpha\}$.
3. Montrer que A est connexe par arcs (plus précisément, montrer que deux points de A peuvent être reliés par une ligne polygonale).

Exercice VII

Un espace métrique (E, d) est dit bien enchainé si pour tout couple (a, b) de points de E et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite finie $a_1, .., a_n$ de points de E telle que $a_1 = a$ et $a_n = b$, et vérifiant, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, l'inégalité $d(a_i, a_{i+1}) \leq \varepsilon$.

1. Montrer que tout espace métrique connexe est bien enchainé. Que peut-on dire de la réciproque ?
2. Soit (E, d) un espace métrique compact. Montrer que E est connexe si et seulement s'il est bien enchainé.

Exercice VIII

Soient (E, d) un espace métrique compact et $f : E \to \mathbb{R}$ une application localement bornée. Montrer que f est bornée sur E.

Exercice IX

Montrer qu'un espace métrique compact est complet.

Exercice X

1. Soit X un espace métrique compact et (f_n) une suite d'applications continues à valeurs dans un espace métrique Y, convergeant vers f uniformément sur X. Montrer que si (x_n) est une suite de points de X convergeant vers $x \in X$, alors $f_n(x_n)$ tend vers $f(x)$.
2. Application : Soit X un espace métrique compact, et soit (f_n) une suite d'applications de X dans X, ayant chacune un point fixe; on suppose que la suite (f_n) converge vers une fonction f uniformément sur X. Montrer que f a aussi un point fixe.
3. Soit K un convexe compact de $\mathbb{R}^n$ et f une application continue de K dans K vérifiant

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|;$$

En considérant les fonctions f_n définies sur K par $f_n(x) = \frac{1}{n} f(x_0) + (1 - \frac{1}{n}) f(x)$, où $x_0 \in K$, montrer que f a un point fixe. Est-il unique ? Que se passe-t-il si K n'est plus convexe ?