

Licence 3 Mathématiques
Corrigé du devoir n° 1

Exercice I

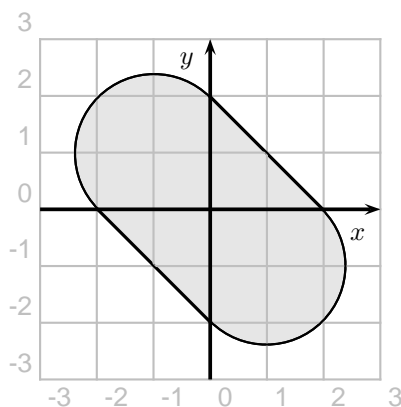
1. La positivité de N est claire, tout comme l'inégalité triangulaire et l'homogénéité, reste donc à étudier les cas d'annulation de N . Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; la fonction $t \mapsto |tx + (1-t)y|$ étant continue et positive sur $[0, 1]$, son intégrale est nulle si et seulement elle est identiquement nulle, autrement $(x, y) = 0$.
2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Quitte à multiplier (x, y) par -1 , on peut supposer $x \geq y$. Si $x = y$, alors $N(x, y) \leq 1$ est équivalent à $|x| \leq 1$, supposons donc $x > y$. En faisant le changement de variable $u = tx + (1-t)y$ dans l'intégrale définissant la norme on obtient

$$N(x, y) = \frac{1}{x-y} \int_y^x |u| \, du.$$

Si x et y sont de même signe alors $N(x, y) = \left| \frac{x^2 - y^2}{2(x-y)} \right| = \frac{1}{2}|x + y|$. Dans le cas contraire on a

$$\begin{aligned} N(x, y) &= \frac{1}{x-y} \left(\int_y^0 -u \, du + \int_0^x u \, du \right) \\ &= \frac{1}{x-y} \left(\left[-\frac{u^2}{2} \right]_y^0 + \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^x \right) = \frac{x^2 + y^2}{2(x-y)}. \end{aligned}$$

Ainsi, $N(x, y) \leq 1$ si et seulement si (x, y) appartient à la boule de centre $(1, -1)$ et de rayon $\sqrt{2}$. Graphiquement cela donne



3. Graphiquement on a $\overline{B}_2(0, \sqrt{2}) \subseteq \overline{B}_N(0, 1) \subseteq \overline{B}_2(0, 2\sqrt{2})$, on a donc, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ les inégalités

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \|(x, y)\|_2 \geq N(x, y) \geq \frac{\sqrt{2}}{4} \|(x, y)\|_2.$$

Exercice II

1. Si A est non vide et contenu dans une boule de rayon un certain $M \in \mathbb{R}^+$, alors le sous ensemble $\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$ de \mathbb{R} est également non vide et majoré par $2M$ (inégalité triangulaire). Cette partie de \mathbb{R} admet donc une borne supérieure, autrement dit $\text{diam}(A)$ est bien défini.
2. Pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$ on a $d\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right)\right) = \sqrt{2} \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \leq \sqrt{2}$, de plus la suite

$$\left(d\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), (1, 1)\right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

converge vers cette dernière valeur, donc $\sqrt{2}$ est le diamètre de ce premier ensemble.

Pour tous f, g dans A et tout $x \in [0, 1]$ on a $-1 \leq f(x) - g(x) \leq 1$, donc $\|f - g\|_1 \leq 1$, en particulier $\text{diam}(A) \leq 1$. Cette valeur est atteinte pour les fonctions constantes $x \mapsto 0$ et $x \mapsto 1$, donc $\text{diam}(A) = 1$.

Comme B est inclus dans A , son diamètre est inférieur ou égal. De plus si l'on note f la fonction $x \mapsto 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'élément f_n de B étant affine sur $[0, \frac{1}{n}]$ et constante sur $[\frac{1}{n}, 1]$, on a

$$\|f - f_n\|_1 = 1 - \frac{1}{2n}$$

donc $\text{diam}(B) = 1$. Notons que cette valeur n'est pas atteinte (argument de continuité en 0).

3. Soit $s \in S \cap B(x, r)$ et $y \in S$, on a $(x, y) \leq d(x, s) + d(s, y) \leq r + r$, donc S est incluse dans la boule $B(x, 2r)$.
4. L'inégalité est bien vraie. Soit en effet $c \in A \cap B$ et soit $u, v \in A \cup B$. Si u, v appartiennent tout deux à A ou à B , alors $d(u, v) \leq \max\{\text{diam}(A), \text{diam}(B)\} \leq \text{diam}(A) + \text{diam}(B)$. On peut donc supposer $(u, v) \in A \times B$, on a alors

$$d(u, v) \leq d(u, c) + d(c, v) \leq \text{diam}(A) + \text{diam}(B).$$

On obtient ainsi l'inégalité souhaitée.

Exercice III

1. Comme F est un espace vectoriel, il contient 0, ainsi l'ensemble $\{\|x - f\| \mid f \in F\}$ est non vide est minoré par 0, il admet une borne inférieure, autrement dit l'application N_F est bien définie.

Pour montrer (a), (b) et (c), il suffit de remarquer que F étant un espace vectoriel, il contient 0 (d'où (a)), est stable par multiplication par un scalaire (d'où (b) en utilisant l'homogénéité de $\|\cdot\|$), et par addition (d'où (c)). Montrons (d). Pour tout $(x, x') \in E^2$ et tout $(f, f') \in F^2$ on a $\|x - f\| + \|x' - f'\| \geq \|x + x' - (f + f')\| \geq N_F(x + x')$. Ainsi $N_F(x) + N_F(x') \geq N_F(x + x')$.

2. Par définition N_F est la distance de x à F , ainsi $N_F(x) = 0$ si et seulement si x appartient à l'adhérence de F , qui est égale à F , celui-ci étant fermé par hypothèse. A fortiori N_F est une norme si et seulement si $F = \{0\}$.

3. L'ensemble $\{N_F(x) \mid x \in \overline{B}(0, 1)\}$ est non vide (il contient 0) et d'après 1(a), il est majoré par 1. Il admet donc une borne supérieure.

On vient de le voir, $N_F(x) = 0$ si et seulement si $x \in F$, donc $N_F(x) > 0$. Soit $\varepsilon > 0$, par définition d'une borne inférieure et puisque $\varepsilon \cdot N_F(x) > 0$, il existe $f_\varepsilon \in F$ tel que

$$N_F(x) \leq \|x - f_\varepsilon\| < N_F(x) + \varepsilon \cdot N_F(x).$$

4. Soit $x \in E \setminus F$ et $\varepsilon > 0$. D'après la question précédente et 1(b) on a

$$N_F(x) \leq \|x - f_\varepsilon\| < (1 + \varepsilon)N_F(x - f_\varepsilon).$$

En divisant par $1 + \varepsilon$ et $\|x - f_\varepsilon\| \geq N_F(x) > 0$ et en utilisant 1(b) il vient

$$\frac{1}{1 + \varepsilon} < N_F\left(\frac{x - f_\varepsilon}{\|x - f_\varepsilon\|}\right).$$

On obtient en particulier pour tout $\varepsilon > 0$ l'inégalité

$$\sup \{N_F(x) \mid x \in \overline{B}(0, 1)\} \geq \frac{1}{1 + \varepsilon}.$$

Il reste à faire tendre ε vers 0 pour obtenir l'égalité souhaitée.