

Licence 3 Mathématiques
Devoir n° 1

Exercice I

On considère l'application $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad N(x, y) = \int_0^1 |tx + (1-t)y| dt.$$

1. Montrer que N est une norme.
2. Déterminer la boule centrée en l'origine et de rayon 1 pour cette norme (indication : pour $x \neq y$, on pourra effectuer le changement de variable $u = y + t(x - y)$).
3. Montrer que la norme N est équivalente à la norme euclidienne.

Exercice II

Soit A une partie non vide d'un espace métrique (E, d) . On définit le *diamètre* de A et on note $\text{diam}(A)$ la borne supérieure de l'ensemble

$$\{d(x, y) \mid x, y \in A\}.$$

1. Montrer que pour toute partie bornée (*i.e.* incluse dans une boule) A de E non vide, $\text{diam}(A)$ est bien défini.
2. Dans \mathbb{R}^2 muni de la distance euclidienne, quel est le diamètre de l'ensemble $\{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$? Dans l'espace des fonctions continues $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la distance induite par la norme $\|\cdot\|_1$ (c'est-à-dire définie pour tout $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ par $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$), quel est le diamètre des ensembles suivants :

$$A := \{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \mid \forall x \in [0, 1], 0 \leq f(x) \leq 1\}$$

$$B := \{f \in A \mid f(0) = 0\}.$$

3. Soit S une partie de diamètre $r > 0$. Soit $x \in E$ tel que $S \cap B(x, r) \neq \emptyset$; montrer que S est incluse dans la boule $B(x, 2r)$.
4. Soient A, B deux parties bornées de E d'intersection non vide. L'inégalité suivante est-elle toujours vraie :

$$\text{diam}(A \cup B) \leq \text{diam}(A) + \text{diam}(B) ?$$

Exercice III

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur \mathbb{C} et F un sous-espace vectoriel propre (*i.e.* $F \neq E$) et fermé de E . On considère l'application $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in E$ par

$$N_F(x) = \inf_{f \in F} \|x - f\|.$$

1. Établir, pour tout $(x, x') \in E^2$ et tout $(f, \lambda) \in F \times \mathbb{C}$, les propriétés

- (a) $N_F(x) \leq \|x\|$;
- (b) $N_F(\lambda x) = |\lambda|N_F(x)$;
- (c) $N_F(x - f) = N_F(x)$;
- (d) $N_F(x + x') \leq N_F(x) + N_F(x')$.

À quelle condition sur F l'application N_F est-elle une norme sur E ?

2. Soit $x \in E \setminus F$. Rappelez pourquoi $N_F(x)$ est strictement positif. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $f_\varepsilon \in F$ tel que

$$N_F(x) \leq \|x - f_\varepsilon\| < (1 + \varepsilon)N_F(x).$$

3. On note $\overline{B}(0, 1)$ la boule fermée unité centrée en l'origine. Montrer que l'ensemble

$$\{N_F(x) \mid x \in \overline{B}(0, 1)\}$$

admet une borne supérieure, et que celle-ci est égale à 1.