

Exercice I

On considère un intervalle $[a, b[$ de \mathbb{R} . Soient f et g deux applications continues de $[a, b[$ dans \mathbb{R} , on suppose f décroissante de limite nulle en b et g vérifiant

$$\exists M \in \mathbb{R} ; \forall x \in [a, b[, \left| \int_a^x g(t) dt \right| \leq M.$$

1. Montrer l'inégalité

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)g(t) dt \right| \leq 2Mf(x_1).$$

2. En déduire que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)g(t) dt$ converge.
3. Soit α un réel positif ou nul. Discuter, selon la nature de α , la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t) \cos(t)}{\ln(1+t^\alpha)} dt.$$

Exercice II

Déterminer la nature des intégrales suivantes.

1. $\int_0^1 \ln(t) dt$;
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^3 - t^2 + t - 1}$;
3. $\int_0^{\pi/2} \tan(t) dt$;
4. $\int_0^1 \frac{e^t}{t} dt$;
5. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^\alpha} dt$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
6. $\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{\sin(t)} dt$.

Exercice III

Montrer que l'équation suivante admet une solution dans $[0, \pi]$:

$$\int_0^1 \sin(2x(1-t^2) + \pi t^2) dt = 0.$$

Exercice IV

Soient I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et f une fonction continue de I dans \mathbb{R} .

1. Montrer que, pour tout $\alpha \in I$, l'application $x \mapsto \int_\alpha^x f(t) dt$ est continue sur I , nulle en α , dérivable et de dérivée f .
2. Soient $\alpha, \beta \in I$ tels que f soit positive sur $[\alpha, \beta]$. Montrer que si l'intégrale de f sur $[\alpha, \beta]$ est nulle, alors f est identiquement nulle sur $[\alpha, \beta]$
3. Soit $u \in C^1(\mathbb{R}, I)$, montrer que l'application $x \mapsto \int_\alpha^{u(x)} f(t) dt$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée en tout point.

Exercice V

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite monotone de fonctions continues d'un espace métrique compacte (X, d) dans \mathbb{R} (c'est-à-dire, pour tout $x \in X$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$). On suppose que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction continue f .