

La fonction exponentielle

1 Définition et propriétés

Définition 1.1 *Il existe une unique fonction f dérivable sur \mathbb{R} telle que :*

$$f' = f \text{ et } f(0) = 1.$$

*Cette fonction est appelée fonction exponentielle de base e et est notée \exp .
Le nombre e est le réel $\exp(1)$ et on a $e \approx 2,718$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(x) = e^x$.*

Propriété 1.2 *x et y sont deux réels et n un entier relatif.*

$$\begin{aligned} \cdot e^{x+y} &= e^x \times e^y & \cdot e^{-x} &= \frac{1}{e^x} \\ \cdot e^{x-y} &= \frac{e^x}{e^y} & \cdot (e^x)^n &= e^{nx} \end{aligned}$$

Propriété 1.3

- *La fonction \exp est définie, continue et dérivable sur \mathbb{R} .*
- *La fonction \exp n'est ni paire ni impaire.*
- *La fonction \exp est strictement positive.*
- *La fonction \exp est strictement croissante sur \mathbb{R} .*

Propriété 1.4 *Limites de références*

$$\begin{aligned} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x &= 0 & \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x &= +\infty \\ \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} &= +\infty & \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x &= 0 \\ \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= 1 \end{aligned}$$

Exercice 1 · Construire la courbe représentative de la fonction \exp dans un repère orthonormé.

- Que dire de x et y dans les deux cas suivants: $e^x = e^y$
 $e^x < e^y$

Propriété 1.5 Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} , alors e^u est aussi dérivable sur I et

$$(e^u)' = u'e^u.$$

Théorème 1.6

- L'ensemble des fonctions dérivables sur \mathbb{R} solutions de l'équation différentielle $y' = ay$, où a est un réel fixé est : $S = \{f_\alpha : x \mapsto \alpha e^{ax}, \alpha \text{ décrivant } \mathbb{R}\}$.
- L'ensemble des fonctions dérivables sur \mathbb{R} solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$, où a et b sont deux réels fixés est : $S = \{f_\alpha : x \mapsto \frac{-b}{a} + \alpha e^{ax}, \alpha \text{ décrivant } \mathbb{R}\}$.

2 Exercices

Exercice 2 Simplifier l'écriture de chacune des expressions suivantes :

$$A(x) = e^{2x+1} \times e^{-3x+4}, \quad B(x) = \frac{e^x + 2}{e^x + 1} - \frac{e^x - 2}{e^x - 1}$$

$$C(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} + \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1}, \quad D(x) = 1 + e^x + e^{2x} + \frac{1}{e^x - 1}$$

Exercice 3 Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes :

$$e^{4x+1} = e^{-5x+4} \quad 3e^{2x} + 4e^x - 7 = 0$$

$$-e^{2x} + e^{x+1} + e^x = e \quad e^{x+2} < \sqrt{e}$$

$$(e^{x+1} - 1)(e - e^{x^2}) \leq 0 \quad g'(x) \geq 0, \text{ où } g(x) = e^{2x} + 2e^x - 4x - 3$$

Exercice 4 Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition lorsque :

$$f(x) = e^{2x} - 3e^x - x \quad f(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x + 1}$$

$$f(x) = \frac{xe^x - 1}{e^x - 1} \quad f(x) = \frac{e^x}{x^2}$$

Exercice 5 Dériver les fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x + 1} \quad g(x) = e^{-2x} - 2e^x - 4x + 1$$

$$f(x) = \frac{e^{x^2}}{x + 2} - 3e^{-4x} \quad i(x) = xe^{\sqrt{x}}$$

Exercice 6

- Résoudre les équations différentielles suivantes : $y' = 2y$ $y' = -5y + \frac{2}{3}$
- Trouver l'unique solution des systèmes d'équation suivantes :
 (S1) $y' = 2y$ (S2) $y' = -5y + \frac{2}{3}$
 $y(0) = 3$ $y(0) = -1$

Théorème 2.1 (Théorème des valeurs intermédiaires) Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a; b]$ de \mathbb{R} . On suppose que f vérifie les conditions suivantes :

- (i) f est continue sur $[a; b]$.

(ii) f est strictement croissante sur $[a; b]$.

(iii) $f(a) < 0$.

(iv) $f(b) > 0$.

Alors il existe un **unique** $\alpha \in]a; b[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Exercice 7

1. Réaliser l'étude de la fonction suivante $f : x \mapsto 3e^{2x} - 6e^x - 1$.

2. Construire la représentation de f dans un repère orthonormal.

3. A l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, démontrer que f s'annule en une seule valeur sur \mathbb{R} , que l'on appellera α , et donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

4. En déduire le tableau de variations de la fonction $g(x) = \frac{3}{2}e^{2x} - 6e^x - x + 3$.

Exercice 8 (d'après Bac 1996) Soit $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$.

I Questions préliminaires

1. Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

a) Montrer que pour tout $x > 0$, on a $g'(x) > 0$. En déduire le sens de variation de g sur $[0; +\infty[$.

b) Calculer $g(0)$. En déduire que, pour tout $x > 0$, on a $g(x) > 0$.

2. Soit h la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $h(x) = (2 - x)e^x - 1$.

a) Etudier la fonction h et dresser son tableau de variation.

b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α , et que l'on a $\alpha > 1$. (On pourra utiliser le théorème 2.1)

c) Vérifier la double inégalité $1,84 < \alpha < 1,85$.

d) Préciser, suivant les valeurs du nombre $x \geq 0$, le signe de $h(x)$.

II Etude de la fonction f et tracé de sa courbe représentative \mathcal{C} .

1.a) Justifier que f est définie en tout point de $[0; +\infty[$.

b) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, on peut écrire :

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 - xe^{-x}}$$

En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; interpréter géométriquement, relativement à \mathcal{C} , le résultat obtenu.

c) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = \frac{h(x)}{(e^x - x)^2}$.

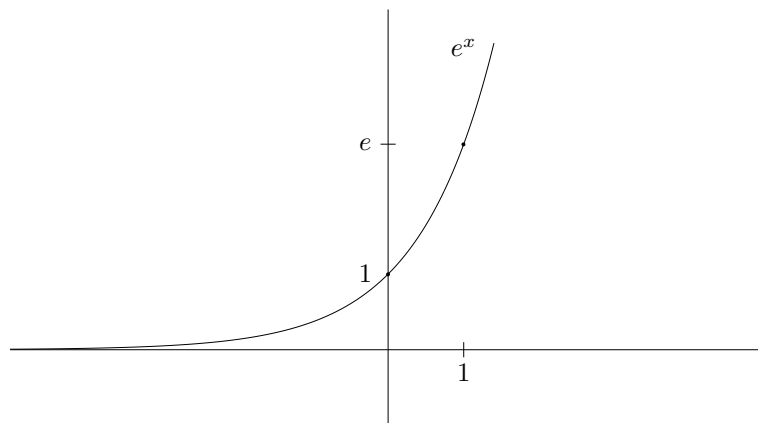
d) Etudier la fonction f et dresser son tableau de variation.

2.a) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$.

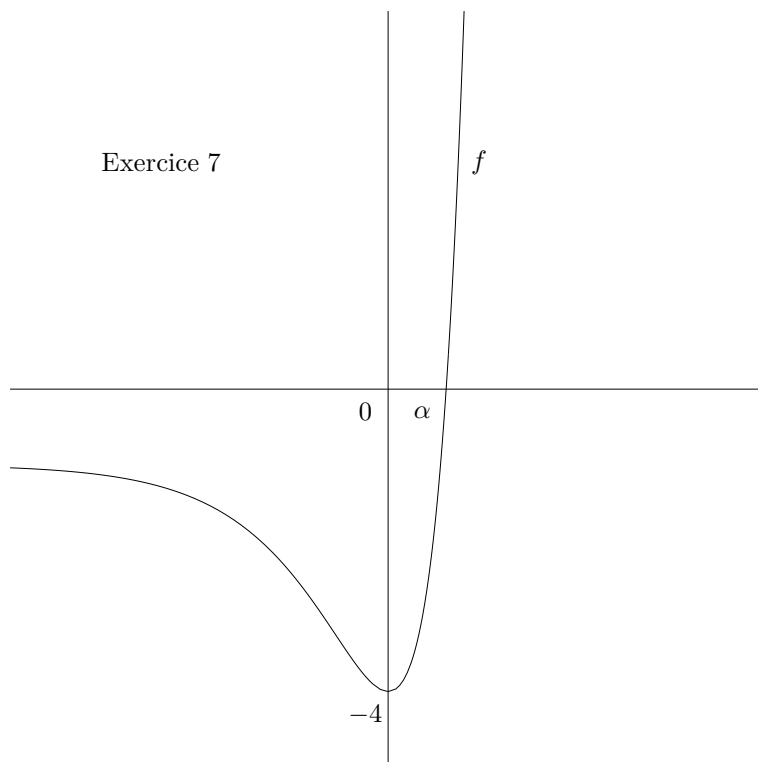
b) En déduire suivant les valeurs de $x \geq 0$, la position de la courbe \mathcal{C} par rapport à la droite D d'équation $y = x$.

3.a) Préciser la tangente au point de \mathcal{C} d'abscisse 0.

b) Tracer \mathcal{C} , en faisant figurer sur le dessin la droite Δ d'équation $y = 1$ ainsi que tous les éléments obtenus au cours de l'étude.



Exercice 7



Exercice 8

