Université de Caen
U.F.R. Sciences

Année universitaire 2007 - 2008
semestre 5

Licence 3 Mathématiques

Espaces métriques, TD n° 6

Exercice I

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne. Donner la nature topologique (ouvert, fermé, compact) des ensembles suivants :

1. $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 - 2xy \leq 1\}$
2. $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + e^{xy} \leq 36\}$
3. $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + 3y^2 < 1\}$

Exercice II

1. Soit (E, d) un espace métrique et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de E qui converge vers $a \in E$. Montrer que $K = \{x_n \mid n \geq 0\} \cup \{a\}$ est un compact de E.
2. Soit (E, d) un espace métrique compact et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de E qui possède une seule valeur d'adhérence a dans E. Montrer que cette suite converge vers a.

Exercice III

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et A et B deux parties de E. On note :

$$A + B := \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\}.$$

1. Montrer que si A est ouvert, alors $A + B$ est ouvert.
2. Montrer que si A est compact et B fermé, alors $A + B$ est fermé.
3. Montrer que si A et B sont compact, alors $A + B$ est compact.
4. On munit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de la norme euclidienne et on pose :

   $$A := \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a > 0 \text{ et } ab = 1\} \quad \text{et} \quad B := \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a = 0 \text{ et } b \leq 0\}.$$

   Déterminer la nature topologique de A, B et $A + B$.

Exercice IV

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et A une partie compacte de E. Soit $a \in A$ un point *non isolé*, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ on a $B(a, \varepsilon) \cap A \neq \{a\}$. On considère une fonction continue $f : E \to E$ telle que $f(A) \subseteq A$ et vérifiant :

$$\forall x \in A \setminus \{a\}, \ \|f(x) - a\| < \|x - a\|.$$

1. Montrer que $f(a) = a$.
2. Soit $x_0 \in A$; pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi définie converge vers a.

Exercice V

Soient n un entier naturel, d la distance usuelle sur $\mathbb{R}^n$, et F un fermé non vide de $\mathbb{R}^n$.

1. On considère un élément x_0 de $\mathbb{R}^n$.
   (a) Montrer qu'il existe une suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de :
   $$\bar{B}\Big(x_0 \ , \ d(x_0, F) + 1\Big) \ \cap \ F$$
   telle que la suite $\big(d(x_0, f_k)\big)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $d(x_0, F)$.
   (b) En déduire que la distance $d(x_0, F)$ est atteinte.
2. On rappelle que l'application définie sur $\mathbb{R}^n$ par $x \mapsto d(x, F)$ est continue. Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. On suppose que pour tout $x \in U$, la distance $d(x, F)$ n'est atteinte qu'en un seul point, que l'on notera $P(x)$. Le but ici est de montrer que l'application $P : U \to F$ ainsi définie est continue.

   Soient $x \in U$ et $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in U^{\mathbb{N}}$ une suite convergente vers x.
   (a) Montrer que la suite $\Big(d\big(x_k, P(x_k)\big)\Big)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $d\big(x, P(x)\big)$.
   (b) Montrer que l'application $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue (où le produit $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est muni de la distance $\delta\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \max\big\{d(x_1, y_1), d(x_2, y_2)\big\}$).
   (c) En raisonnant par l'absurde, montrer que la suite $\big(P(x_k)\big)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $P(x)$.

Exercice VI

1. Soit X un espace métrique compact et (f_n) une suite d'applications continues à valeurs dans un espace métrique Y, convergeant vers f uniformément sur X. Montrer que si (x_n) est une suite de points de X convergeant vers $x \in X$, alors $f_n(x_n)$ tend vers $f(x)$.

2. Application : Soit X un espace métrique compact, et soit (f_n) une suite d'applications de X dans X, ayant chacune un point fixe; on suppose que la suite (f_n) converge vers une fonction f uniformément sur X. Montrer que f a aussi un point fixe.

3. Soit K un convexe compact de $\mathbb{R}^n$ et f une application continue de K dans K vérifiant

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|;$$

En considérant les fonctions f_n définies sur K par $f_n(x) = \frac{1}{n}f(x_0) + (1 - \frac{1}{n})f(x)$, où $x_0 \in K$, montrer que f a un point fixe. Est-il unique ? Que se passe-t-il si K n'est plus convexe ?

Exercice VII

[Premier théorème de Dini]

> *La convergence simple d'une suite monotone de fonctions définies et continues sur un espace métrique compact vers une fonction continue implique sa convergence uniforme.*

Soit (X, d) un espace métrique, f et f_n $(n \in \mathbb{N})$ des fonctions de X dans $\mathbb{R}$. On fait les hypothèses suivantes :

- Continuité : pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n et la fonction f sont continues sur X ;
- Monotonie : la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (c'est-à-dire, pour tout $x \in X$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$;
- Compacité : l'espace (X, d) est compact ;
- Convergence simple : pour tout x de X, la suite de réels $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f(x)$.

Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur X vers f (indication : utiliser un recouvrement de X par un nombre fini de boules.

Exercice VIII

On va montrer que les polynômes sont denses dans les fonctions continues sur $[-1, 1]$. Pour commencer, on approche la fonction $|t|$.

1. Montrer que la suite de polynômes définis par récurrence :

$$p_{n+1}(t) = p_n(t) + \frac{1}{2}(t^2 - p_n^2(t)), \quad p_0(t) = 0,$$

converge vers $|t|$.

2. En déduire que toute fonction affine par morceaux sur $[-1, 1]$ est limite d'une suite de polynômes.

3. Montrer que les polynômes sont denses dans les fonctions continues sur $[-1, 1]$.