Université de Caen
U.F.R. Sciences

Année universitaire 2007 - 2008
semestre 5

Licence 3 Mathématiques

Espaces métriques, TD n° 5

Exercice I

L'espace $(\mathbb{R}, d)$ est-il complet si d est l'une des métriques suivantes?

1. $d(x, y) = |x^3 - y^3|$.
2. $d(x, y) = |\exp(x) - \exp(y)|$.
3. $d(x, y) = \log(1 + |x - y|)$.

Exercice II

On considère sur l'ensemble $E := \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ la distance triviale d_t et la distance d induite par celle de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que (E, d_t) est complet mais (E, d) ne l'est pas.
2. Les espaces (E, d_t) sont-ils homéomorphes.

Exercice III

Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques et f un homéomorphisme de E sur F uniformément continue. Montrer que si (F, δ) est complet, alors (E, d) aussi.

Exercice IV

Soit $E := [0, 1]^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans $[0, 1]$.
Pour tous $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E, on pose :

$$d(u, v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n - v_n|}{2^n}.$$

1. Montrer que (E, d) est un espace métrique complet.
2. Ce résultat reste-t-il vrai pour l'ensemble des suites à valeurs dans $]0, 1[$?

Exercice V

On note $l^\infty_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$ l'espace vectoriel des suites bornées à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer que $l^\infty_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$ muni de la norme $\|(u_n)\|_\infty = \sup_{n\geq 0} |u_n|$ est complet.
2. Montrer que le sous-espace $CV^\infty_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$ de $l^\infty_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$ formé des suites convergentes est complet.

Exercice VI

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$. Pour tout élément f de E on pose :

$$N(f) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t) + f'(t)|.$$

1. Soient $g \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Résoudre l'équation différentielle :
$$f + f' = g$$
avec pour condition initiale $f(0) = 0$.
2. Montrer que N est une norme équivalente à la norme N' définie par :
$$N'(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \ ,$$
où $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$.
3. Montrer que (E, N) est complet.

Exercice VII

On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E := \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On considère de plus l'application :

$$\begin{array}{rccl} f : & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & \left(t \mapsto \dfrac{1}{2}\left[1 + \displaystyle\int_0^1 te^{st}x(s)ds\right]\right) \end{array}$$

Montrer que f possède un unique point fixe x et donner une majoration de $\|x - x_n\|_\infty$ où x_n est la suite d'éléments de E définie par $x_0 : t \mapsto 1$ et $x_{n+1} = f(x_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice VIII

On note $\mathcal{C}^0_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues et bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient $\lambda \in]0,1[$ et $g \in \mathcal{C}^0_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe une unique fonction $f \in \mathcal{C}^0_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda f(x+1) + g(x).$$
2. Exprimer f en fonction de g.