Université de Caen **Année universitaire 2007 - 2008**
U.F.R. Sciences **semestre 5**

Licence 3 Mathématiques
Espaces métriques, TD n° 3

Exercice I

Déterminer l'adhérence et l'intérieur des ensembles suivants :

1. $\mathbb{Q}$;
2. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, y = 0\}$;
4. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$;
5. $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$;
6. le cercle unité de $\mathbb{R}^2$;
7. $\{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid x \in]0, 1]\}$.

Exercice II

Soit (E, d) un espace métrique.

1. Soit I un ensemble quelconque et soit $\{A_i, i \in I\}$ une famille de parties de E. Montrer que l'égalité $\overline{\cup_{i \in I} A_i} = \cup_{i \in I} \overline{A_i}$ est vraie si I est fini, mais pas en général.
2. Donner dans $\mathbb{R}$ des exemples d'ouverts A et B tels que les ensembles $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$ soient distincts deux à deux.
3. Soit A une partie de E et O un ouvert de E.
   (a) Montrer que $O \cap \overline{A} \subseteq \overline{O \cap A}$. Montrer que ceci n'est plus le cas si O n'est pas ouvert.
   (b) Montrer que, si $O \cap A = \emptyset$, alors $O \cap \overline{A} = \emptyset$, mais que $\overline{O} \cap \overline{A}$ n'est pas nécessairement vide.

Exercice III

Soient (E, d) un espace métrique et A une partie de E.

1. Montrer que A et son complémentaire ont la même frontière.
2. Montrer que $A = \partial A$ si et seulement si A est un fermé d'intérieur vide.
3. Montrer que $\partial(\overline{A})$ et $\partial(\mathring{A})$ sont toutes deux incluses dans ∂A, et donner un exemple où ces inclusions sont strictes.
4. Comparer les ensembles $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$ et $\mathring{A} \cup \mathring{B}$. Même question pour $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$ et $\mathring{A} \cap \mathring{B}$.
5. Montrer que $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$, et que l'inclusion peut être stricte ; montrer qu'il y a égalité lorsque $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$.
6. Montrer que $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} = \mathring{A} \cup \mathring{B}$ reste vrai lorsque $\partial A \cap \partial B = \emptyset$ (raisonner par l'absurde).

Exercice IV

1. Soit X un espace topologique, et D une partie de X. Montrer qu'il est aussi équivalent de dire
   (a) Le complémentaire de D est d'intérieur vide ;
   (b) l'ensemble D est dense dans X (c.-à-d. $\overline{D} = X$).
2. Montrer qu'un ensemble $A \subset X$ rencontre toute partie dense dans X si et seulement s'il est d'intérieur non vide.
3. Soit E et G deux ouverts denses dans X ; montrer que $E \cap G$ est encore dense dans X.

Exercice V

On munit $\mathbb{R}$ de la distance usuelle d. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $a \in]0, +\infty[$, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid |f(x)| > a\}$ soit fini.

Montrer que $f^{-1}(\{0\})$ est dense dans $\mathbb{R}$ (on rappelle qu'une union dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est dénombrable).

Exercice VI

On considère (E, δ) un espace métrique et $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle d.

1. On note toujours d la distance induite sur $\mathbb{N}$. Montrer que toute application de $(\mathbb{N}, d)$ dans (E, δ) est continue.
2. Montrer que, si δ est la distance triviale sur E, alors toute application continue de $(\mathbb{R}, d)$ dans (E, δ) est constante.

Exercice VII

1. Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques, et soient f, g deux applications continues de X dans Y. Montrer que l'ensemble $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ est un fermé de X ; en déduire que si f et g coïncident sur une partie dense de X, alors $f = g$.
2. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$
   Montrer que, pour tout rationnel r, on a $f(r) = rf(1)$. En déduire l'expression de f.