Université de Caen
U.F.R. Sciences

Année universitaire 2007 - 2008
semestre 5

Licence 3 Mathématiques

Espaces métriques, TD n^o 1

Exercice I

Les applications suivantes sont-elles des distances sur $\mathbb{R}$:

1. $d(x,y) = x^5 - y^5$;
2. $d(x,y) = |x^5 - y^5|$;
3. $d(x,y) = |x^2 - y^2|$;
4. $d(x,y) = |\sin(x-y)|$;
5. $d(x,y) = (x^4 + 5y^4)|x-y|$.

Exercice II

Soient $\mathbb{K}$ un corps et n un entier strictement positif. On définit sur $\mathbb{K}^n$ les applications N_1^*, N_2^* et N_∞^* en posant, pour tout $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$N_1^*(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} |x_k|,$$

$$N_2^*(\mathbf{x}) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2},$$

$$N_\infty^*(\mathbf{x}) = \sup_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

Montrer que ces trois applications sont des normes sur $\mathbb{K}^n$ et que celles-ci sont équivalentes.

Exercice III

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites $x = (x_n)_{n \geq 0}$ et soit $\sum_{n \geq 0} a_n$ une série convergente à termes strictement positifs.

On définit, pour tout $x = (x_n)_{n \geq 0} \in E$ et pour tout $y = (y_n)_{n \geq 0} \in E$:

$$d(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{|y_n - x_n|}{1 + |y_n - x_n|}.$$

Montrer que d est une distance sur E et qu'elle n'est pas associée à une norme.

Exercice IV

Soit (E, d) un espace métrique, et soit $\theta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction croissante, non identiquement nulle, vérifiant $\theta(0) = 0$ et, pour tous $u, v \in \mathbb{R}_+$, l'inégalité $\theta(u+v) \leq \theta(u) + \theta(v)$ (on appelle cette dernière propriété « sous-additivité »).

1. (a) Montrer que pour tout $u > 0$, on a $\theta(u) > 0$.
   (b) En déduire que $\delta = \theta \circ d$ est une distance sur E.
2. On suppose en plus que θ est continue en 0. Montrer qu'une suite de E est une suite convergente de (E, d) si, et seulement si, elle est une suite convergente de (E, δ).
3. Pour tous $x, y \in E$, on pose : $d'(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$.
   (a) Montrer que d' une une distance qui a les mêmes suites convergentes que d.
   (b) Les distances d et d' sont-elles équivalentes ? Conclusion ?

Exercice V

Si x et y sont deux vecteurs du plan $\mathbb{R}^2$, muni de la distance euclidienne d_2, on définit $d(x, y) = d_2(x, y)$ si x et y sont colinéaires et $d(x, y) = d_2(x, 0) + d_2(y, 0)$ s'ils ne le sont pas.

1. Montrer que d est une distance.
2. Décrire géométriquement la boule ouverte $B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, y) < r\}$ pour $x \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}^+$ quelconques fixés. On appelle parfois cette distance « SNCF », pourquoi ?
3. Existe-t-il une norme N sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ telle que d soit la distance associée N ?

Exercice VI

Soient des réels $a > 0$ et $b > 0$ et $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad N(\mathbf{x}) = a|x_1| + b|x_2|.$$

1. (a) Montrer que N est une norme.
   (b) Pour tout réel r, déterminer la boule de rayon r pour cette norme.
   (c) Montrer que la norme N est équivalente à la norme euclidienne.
2. Même exercice en considérant $N' : (x_1, x_2) \mapsto \sup_{t \in [0,1]} (|x_1 + tx_2|)$.

Exercice VII

On fixe un nombre premier p. Pour tout $a \in \mathbb{Z}^*$, on note $v_p(a)$ l'unique entier k tel que $a = p^k a'$, où a' est un entier non divisible par p (autrement dit $p^{v_p(a)}$ est la plus grande puissance de p divisant a). On considère sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'application d définie par :

$$d(a, b) = \begin{cases} p^{-v_p(a-b)} & \text{si} \quad a \neq b \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, calculer $d(p^n, p^m)$.
2. Montrer que, pour tous $u, v \in \mathbb{Z}$, on a $d(u - v, 0) \leq \max\{d(u, 0), d(v, 0)\}$.
3. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{Z}$ (d est appelée distance p-adique).
4. Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $\varepsilon > 0$. Montrer que pour tout $b \in B(a, \varepsilon)$, on a $B(b, \varepsilon) = B(a, \varepsilon)$.