

Partiel. Espaces Métriques.

Durée: 2 heures.

Chaque candidat doit, en début d'épreuve, porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage après avoir été pointé. Il devra en outre porter son numéro de place sur chacune de ses copies, intercalaires, ou pièces annexées.

Question de cours.

Exercice I.

Dans cet exercice, on considère $E = \mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne. Les parties suivantes sont-elles fermées ? compactes ?

- a) $A = \{(x, y) \in E; 3x^2 + 5y^2 \leq 36\}$
- b) $B = \{(x, y) \in E; 3x^2 - 5y^2 \leq 36\}$;
- c) $C = \{(x, y); 3x^2 + 5y^2 < 36\}$.

Exercice II.

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} , et $\|\cdot\|$ une norme sur E ; on note d la distance associée, si $x, y \in E$ on a donc $d(x, y) = \|x - y\|$. Soient A, B deux parties non vides de E . On note $C = \{c \in E; \exists a \in A; \exists b \in B; c = a + b\}$.

- 1) Soit c_n une suite d'éléments de C , il existe donc $a_n \in A$ et $b_n \in B$ tels que $c_n = a_n + b_n$. Justifier qu'il existe une sous-suite de c_n qui converge, en déduire que C est une partie compacte de E .
- 2) Soit $F = E \times E$, que l'on munit de la distance d^* définie par $d^*((x, y), (u, v)) = d(x, u) + d(y, v)$. Soit f l'application de F dans E définie par $f((x, y)) = x + y$.
 - a) Montrer que f est lipschitzienne de rapport 1.
 - b) En utilisant f et $X = A \times B$, retrouver le résultat de la question 1).

Exercice III.

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} , que l'on suppose normé, on note $\|\cdot\|$ cette norme. L'espace E n'est pas forcément de dimension finie. On note d la distance associée à cette norme, c'est-à-dire que $d(x, y) = \|x - y\|$.

Partie I.

- 1) Soit A une partie de E . On dit que A est convexe, si, pour tout $a, b \in A$, et $t \in [0, 1]$, $c = (1 - t)a + tb \in A$.
Montrer que si A est une partie convexe de E , alors son adhérence \bar{A} est aussi une partie convexe de E .
- 2) Dans cette question, on prend $A = B(0, r)$ (boule ouverte de centre 0 et rayon $r > 0$).
Montrer que A est une partie convexe de E .
- 3) La boule fermée de centre 0 rayon r est-elle toujours une partie convexe de E ?
- 4) Montrer que les parties suivantes sont des parties convexes de E :
 - a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y \leq 1\}$;
 - b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \max\{|x|, |y|\} \leq 2\}$.

Partie II.

Dans toute cette partie, A est une partie non vide de E , qui possède les propriétés suivantes:

- i) $\forall a \in A$, on a $-a \in A$ (A est une partie symétrique par rapport à l'origine);
- ii) $\forall a, b \in A, \forall t \in [0, 1], c = (1 - t)a + tb \in A$ (A est une partie convexe);

- iii) Il existe $r > 0$, tel que $B(0, r) \subset A$ (le point 0 est intérieur à A);
- iv) Il existe $M > 0$, tel que, pour tout $a \in A$, on ait $\|a\| \leq M$ (A est une partie bornée de E pour la distance d).

Soit $x \in E$. On définit $A(x) = \{\lambda \in]0, +\infty[; \frac{x}{\lambda} \in A\}$.

- 1) a) A quoi est égal $A(0)$?
- b) En utilisant la propriété iii), montrer que, pour tout $x \in E$, $A(x)$ est une partie de $]0, +\infty[$ qui contient l'intervalle $]\frac{\|x\|}{r}, +\infty[$, et qui est donc non vide.
- c) Montrer que $A(x)$ est contenu dans l'intervalle $[\frac{\|x\|}{M}, +\infty[$.
- 2) On note désormais pour $x \in E$, $\rho_A(x) = \inf(A(x))$ la borne inférieure de l'ensemble $A(x)$. Cette quantité est bien définie et positive ou nulle puisque $A(x)$ est non vide et contenu dans $]0, +\infty[$.
- a) Que vaut $\rho_A(0)$?
- b) Soit $x \in E$, et $\mu \in \mathbb{R}^*$. Déterminer $A(\mu x)$ en fonction de μ et de $A(x)$, puis $\rho_A(\mu x)$.
- 3) Soient $x, y \in E$, et soit $\varepsilon > 0$.
- a) Justifier l'existence de $\lambda, \mu \in]0, +\infty[$, tels que $\rho_A(x) \leq \lambda < \rho_A(x) + \varepsilon$ et $\rho_A(y) \leq \mu < \rho_A(y) + \varepsilon$, et $\frac{x}{\lambda} \in A, \frac{y}{\mu} \in A$.
- b) Montrer que $\frac{x+y}{\lambda+\mu} \in A$ (On pourra poser $t = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$).
- c) Montrer que $\rho_A(x+y) \leq \rho_A(x) + \rho_A(y)$.
- 4) Montrer que ρ_A est une norme sur E , et que cette norme est équivalente à la norme $\|\cdot\|$.

Partie III.

Dans cette partie, A est toujours fixée, vérifiant les propriétés i), ii), iii), iv) de la partie II.

- 1) Montrer que la partie $B = \overline{A}$ (adhérence de A dans l'espace E muni de la norme $\|\cdot\|$) possède aussi ces propriétés i), ii), iii), iv).
- 2) On note $C = \{x \in E, \rho_A(x) \leq 1\}$. On notera que C est la boule unité fermée de E , pour la norme ρ_A .
- a) Montrer que $A \subset C$.
- b) Montrer que C est une partie fermée de E muni de la norme $\|\cdot\|$.
- c) Soit $x \in E, x \neq 0$. Montrer qu'il existe une suite $\lambda_n \in]0, +\infty[$, telle que $0 < \rho_A(x) \leq \lambda_n < \rho_A(x) + \frac{1}{n+1}$, et $\frac{x}{\lambda_n} \in A$. En déduire que $\frac{x}{\rho_A(x)} \in \overline{A} = B$.
- d) Montrer que $C \subset \overline{A}$ (on pourra écrire x sous la forme $ua + (1-u)b$, avec $u \in [0, 1]$, $a \in B, b \in B$ convenablement choisis), puis déterminer C en fonction de A .
