

Licence de Mathématiques  
Espaces métriques. MA 327. Partiel du 11 décembre 2004.

Durée: 2h30

\*\*\*\*\*

Chaque candidat doit en début d'épreuve porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage *après* signature de la feuille d'émargement. Il devra en outre porter son numéro sur chacune des copies intercalaires.

*Tous les documents, ainsi que les calculatrices sont interdits.*

\*\*\*\*\*

**Question de cours.**

Démontrer le résultat suivant:

**Proposition:** Soit  $(X, d)$  un espace métrique, et  $A$  une partie de  $X$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:

- $A$  est une partie dense de  $X$ ;
- Tout point  $x \in X$  est limite d'une suite  $a_n$  d'éléments de  $A$ ;
- Pour tout ouvert non vide  $U$  de  $X$ , on a  $A \cap U \neq \emptyset$ .

\*\*\*\*\*

**Exercice I.**

**Partie A.**

Dans toute cette partie, on prend  $X = \mathbb{R}^2$ , muni de la distance euclidienne, et  $Y = \mathbb{R}$  muni de la distance usuelle.

1) On considère l'application  $P$  de  $X$  dans  $Y$  définie par  $P(x, y) = x^2 - y^2$ .

Soit  $K = \{0\} \subset Y$ . La partie  $P^{-1}(K)$  est-elle une partie compacte de  $X$  ?

2) On considère l'application  $Q$  de  $X$  dans  $Y$  définie par  $Q(x, y) = 2x^2 + 3y^2$ .

Soit  $K$  une partie compacte de  $Y$ . La partie  $G = Q^{-1}(K)$  est-elle toujours une partie compacte de  $X$  ?

**Partie B**

Dans cette partie,  $(X, d)$  et  $(Y, \delta)$  sont des espaces métriques, et  $f$  est une application continue de  $X$  dans  $Y$ . On suppose de plus que  $Y$  est un espace métrique compact, et que:

i) Pour tout fermé  $F$  de  $X$ ,  $f(F) = G$  est un fermé de  $Y$ ;

ii) Pour tout  $y \in Y$ ,  $f^{-1}(\{y\})$  est un compact de  $X$ .

1) Soit  $F_n$  une suite décroissante de fermés non vides de  $X$ . On pose  $G_n = f(F_n)$ . Montrer que  $G_n$  est une suite décroissante de fermés non vides de  $Y$ .

2) Montrer que l'intersection  $G$  des  $G_n$  est non vide.

3) Montrer que  $X$  est un espace métrique compact (Pour  $y$  convenablement choisi, on pourra considérer  $T_n = F_n \cap f^{-1}(\{y\})$ ).

**Exercice II.**

Sauf dans les questions 1) et 5) de la partie A), et dans la question 1) de la partie B) l'espace  $(X, d)$  est un espace métrique quelconque.

### Partie A.

Soit  $A$  une partie de  $X$ . On dit que  $A$  est *pré-ouverte* si on a la relation  $A \subset \overset{\circ}{\bar{A}}$ .

1) On prend  $X = \mathbb{R}$  muni de la distance usuelle. Déterminer, en justifiant votre réponse, si les parties suivantes sont pré-ouvertes ou non:

- a)  $C = \mathbb{Q}$ ;
- b)  $D = ]0, 1[ \cap \mathbb{Q}$ ;
- c)  $E = \mathbb{Z}$ .

2) On reprend le cas général d'un espace métrique quelconque.

- a) Montrer que si  $A$  est une partie ouverte de  $X$ , alors  $A$  est pré-ouverte.
- b) Montrer que si  $U$  est une partie pré-ouverte de  $X$ , et  $V$  une partie de  $X$  telle que  $V \subset U \subset \bar{V}$ , alors  $V$  est une partie pré-ouverte de  $X$ .
- 3) Soit  $I$  un ensemble non vide d'indices, et  $A_i, i \in I$  une famille de parties pré-ouvertes de  $X$ .

Montrer que  $B = \cup_{i \in I} A_i$  est une partie pré-ouverte de  $X$ .

4) Soit  $U$  un ouvert de  $X$ , et  $B$  une partie dense de  $X$ . On pose  $A = U \cap B$ .

a) Soit  $a \in \bar{U}$ , et  $a_n, n \geq 1$  une suite d'éléments de  $U$  de limite  $a$ . Dire pourquoi il existe  $r_n$  tel que  $0 < r_n < \frac{1}{n}$  et  $B(a_n, r_n) \subset U$ . En déduire qu'il existe  $b_n \in B \cap U$  tel que

$$d(a_n, b_n) < \frac{1}{n} \text{ pour tout } n \geq 1.$$

b) Montrer que  $\bar{A} = \bar{U}$ .

c) Montrer que  $A$  est une partie pré-ouverte de  $X$ .

5) On se place dans  $\mathbb{R}$  munit de la distance usuelle. On considère les deux parties suivantes de  $\mathbb{R}$ :  $A = [-1, 1] \cup \{x \in \mathbb{Q}; |x| > 1\}$ , et  $B = [-1, 1] \cup \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; |x| > 1\}$ .

- a) Montrer que les deux parties  $A$  et  $B$  sont pré-ouvertes.
- b) La partie  $C = A \cap B$  est-elle pré-ouverte ?

6) Soit  $A$  une partie pré-ouverte de  $X$ . On pose  $B = {}^c \left( \overset{\circ}{\bar{A}} \right) \cup A$ .

- a) Montrer que  $B$  est une partie dense de  $X$ .
- b) En déduire que toute partie pré-ouverte de  $X$  peut s'écrire comme l'intersection d'une partie dense de  $X$  et d'un ouvert de  $X$ .

### Partie B.

Soit  $U$  un ouvert de  $X$ . On dit que  $U$  est un *ouvert régulier* si on a  $U = \overset{\circ}{\bar{U}}$ .

1) On se place dans  $\mathbb{R}$  muni de la distance usuelle; Dire (en justifiant votre réponse) si les parties suivantes sont des ouverts réguliers ou non:

- a)  $A = ]0, 2[$ ;
- b)  $B = ]0, 1[ \cup ]1, 2[$ .

2) On reprend le cas général d'un espace métrique quelconque  $(X, d)$ .

Montrer que si  $C$  est une partie fermée de  $X$ , alors  $D = \overset{\circ}{\bar{C}}$  est un ouvert régulier de  $X$ .

3) Soit  $U, V$  deux ouverts réguliers. Montrer que  $U \subset V$  équivaut à dire que  $\bar{U} \subset \bar{V}$ . Donner un exemple montrant que cette équivalence n'est pas toujours réalisée si  $U, V$  ne sont pas deux ouverts réguliers.

4) a) Soient  $U, V$  deux ouverts réguliers de  $X$ .

Soit  $W = U \cap V$ . Montrer que  $W$  est un ouvert régulier de  $X$ .

b) Est-il vrai qu'une réunion d'ouverts réguliers est un ouvert régulier ?

\*\*\*\*\*