UNIVERSITE DE CAEN **Année universitaire 2006-2007**
U.F.R. DE SCIENCES

L2SMG E34 - suites et séries numériques

Exercice 1 Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite rélle convergente. Montrer que la suite $(u_{n+1}-u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.

Exercice 2 Etudier la convergence des suites de terme général :
a) $u_n=\sqrt{n^2+n+1}-n$; b) $\frac{n\sin(n)}{n^2+1}$; c) $\frac{1}{n}+(-1)^n$; d) $n\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{n^2+k}$; e) $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos(\frac{1}{\sqrt{n+k}})$.

Exercice 3 Etudier la convergence des suites de terme général :
a) $u_n=cos(n)$ et $v_n=sin(n)$; b) $u_n=\frac{n+1}{n+3}$; c) $u_0=3$ et $u_{n+1}=\sqrt{u_n+1}$;
d) $u_n=1+\ln(\frac{n}{n-1})$.

Exercice 4 Suites adjacentes

1. Soient a,b deux réels positifs. Montrer $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$.
2. Pour $b\geqslant a\geqslant 0$, montrer qu'on a $a\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant b$ et $a\leqslant\sqrt{ab}\leqslant b$.
3. Soient u_0 et v_0 des réels positifs avec $u_0\leqslant v_0$. On définit deux suites (u_n) et(v_n) par $u_{n+1}=\sqrt{u_nv_n}$ et $v_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
   (a) Montrer $u_n\leqslant v_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
   (b) Montrer que (v_n) est une suite décroissante.
   (c) Montrer que (u_n) est croissante. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et qu'elles ont même limite.

Exercice 5 Césaro convergence.
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle convergente. Notons ℓ sa limite. Soit $v_n=\frac{u_1+\cdots u_n}{n}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge aussi vers ℓ.

Exercice 6 Etudier la nature des séries numériques de terme général u_n dans les cas suivants :
a) $u_n=\frac{n^2+2n}{n^2+3}$; b) $u_n=\frac{1}{\ln n}$; c) $u_n=\frac{n-1}{n^4+n^3+1}$; d) $u_n=sin\frac{\pi}{n}$; e) $u_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$;
f) $u_n=sin^3\frac{\pi}{n}$; g) $u_n=\frac{1}{n(n+\ln n)}$; h) $u_n=\sqrt{n^2+n}-n$; i) $u_n=e^{-\sqrt{n}}$; j) $u_n=\frac{\ln n}{n^2}$.

Exercice 7 Utiliser un développement limité du terme général u_n pour étudier la nature des séries numériques suivantes :
a) $u_n=\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}$; b) $u_n=1-\operatorname{ch}\frac{1}{\sqrt{n}}$; c) $u_n=1-\frac{n}{2}\ln(\frac{n+1}{n-1})$; d) $u_n=e^{\frac{1}{n^\alpha}}-1$ pour $\alpha\in\mathbb{R}$;
e) $u_n=u_n=\ln(\cos\frac{1}{n})$.

Exercice 8 Etudier la natures des séries numériques de terme genéral u_n dans les cas suivants :
a) $u_n=\frac{n!}{n^n}$;b) $u_n=(a+\frac{1}{n})^n$ pour $a>0$; c) $u_n=\frac{2\times 4\times 6\cdots(2n)}{n^n}$;
d) $u_n=\frac{2^n}{n^2}\sin^{2n}\alpha$, avec $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$; e) $u_n=\frac{a^n}{n^2+1}$ avec $a>0$; f) $u_n=\frac{n^2}{2^n+n}$.

Exercice 9 Etudier la nature des series numériques de terme général u_n dans les cas suivants, on précisera s'il y a convergence absolue :
a) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$; b) $u_n = \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$; c) $u_n = \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$.

Exercice 10 Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme.
a) $u_n = a^{\frac{1}{2n-1}} - a^{\frac{1}{2n+1}}$; b) $v_n = \frac{1}{n^2+n}$; c) $w_n = \frac{1}{n^3+3n^2+2n}$.

Exercice 11 Etudier la nature des séries numériques suivantes.
a) $u_n = \ln(1+\frac{1}{n})$; b) $v_n = \ln(1+\frac{(-1)^n}{n})$.

Exercice 12 Etudier la nature des series numériques de terme général u_n dans les cas suivants :
a) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$ avec $n \geqslant 1$; b) $u_n = \frac{n!+2}{(2n)!+1}$; c) $u_n = \frac{1}{n} + \ln(\frac{n-1}{n})$ avec $n \geqslant 2$;
d) $u_n = (\frac{n+1}{n+2})^{n^3}$; e) $u_n = \frac{(-1)^n}{n\ln n}$.