UNIVERSITE DE CAEN **Année universitaire 2006-2007**
U.F.R. DE SCIENCES

L2SMG E34 - Exponetielles de matrice (suite)

Exercice 1 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a-10 & 36 \\ -3 & a+11 \end{pmatrix}$ dans $M_2(\mathbb{R})$, où a est une constante de $\mathbb{R}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de A (on trouvera une base de chaque espace propre).
2. Calculer $\exp(tA)$ et en déduire A^n pour tout n dans $\mathbb{N}$.
3. Soit $B(t) = \begin{pmatrix} e^{ta} \\ 0 \end{pmatrix}$. Résoudre le système différentiel

$$X'(t) = AX(t) + B(t).$$

Exercice 2 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ dans $M_3(\mathbb{R})$.

1. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de A (on trouvera une base de chaque espace propre).
2. Calculer $\exp(tA)$ et en déduire A^n pour tout n dans $\mathbb{N}$.
3. Soit $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}$. Résoudre l'équation diffŕentielle matricielle

$$X'(t) = AX(t) + B(t).$$

Exercice 3 (juin 2003) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

a. Déterminier la fonction matricielle $t \mapsto e^{tA}$.
b. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la matrice A^n.
c. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = x - 4z \\ z' = -y + 4z \end{cases} .$$