UNIVERSITE DE CAEN **Année universitaire 2006-2007**
U.F.R. DE SCIENCES

Deug SM 2 - Feuille 2

1. **Exercice :** On désigne par D la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$D = \{(x, y) \ / \ y \geq 0,\ y \leq x,\ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

   (a) Montrer que si on utilise des coordonnées polaires, on peut définir D comme

$$D = \{M(\rho, \theta) \ / \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4},\ 0 \leq \rho \leq 1\}$$

   et représenter le domaine D dans le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$ rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

   (b) Calculer l'intégrale

$$I = \iint\limits_D \frac{y - x}{\sqrt{x^2 + y^2}} e^{-\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$$

   en effectuant un passage en coordonnées polaires.

2. **Exercice :**En utilisant le changement de variables en coordonnées polaires, calculer les intégrales doubles suivantes :

   (a) $\int\int_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dxdy$ où $D = \{(x, y) \ \ / \ x^2 + y^2 \leq 1\}$.
   (b) $\int\int_D \frac{xy}{1+x^2+y^2} dxdy$où $D = \{(x, y) \ \ / \ \ x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.
   (c) $\int\int_D xy\sqrt{x^2 + y^2} dxdy$où $D = \{(x, y) \ \ / \ x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.
   (d) $\int\int_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} dxdy$ où $D = \{(x, y) \ \ / \ x \geq 0, x^2 + y^2 - y \leq 0\}$.
   (e) $\int\int_D y^2 dxdy$ où $D = \{(x, y) \ \ / \ x^2 + y^2 - 2x \leq 0, x \geq 1\}$.
   (f) $\int\int_D \frac{x^2+y^2}{x+\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$ où D est le domaine limité par la courbe d'équation polaire $r(\theta) = a(1 + \cos\theta)$.

3. Calculer l'aire du domaine D suivant :

$$D = \{(x, y) \ \ / \ x^2 + y^2 \leq 1, y \geq x^2\}.$$

1 Intégrales triples

Exercice 1 *Calculer les intégrales triples suivantes en utilisant le théorème de Fubini :*

1. $\int\int\int_V y\cos(x + z) dxdydz$ *où* $V = \{(x, y, z) \ \ / \ \ x \geq 0, z \geq 0, 0 \leq y \leq \sqrt{x}, x + z \leq \frac{\pi}{2}\}$.

2. $\int\int\int_V x^\alpha z dxdydz$, $\alpha \geq 0$ où $V = \{(x,y,z) \;\; / \;\; x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1, 0 \leq z \leq xy\}$.
3. $\int\int\int_V \cos z.dxdydz$ avec $V = \{(x,y,z) \;\; / \;\; x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ puis avec $V = \{(x,y,z) \;\; / \;\; x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1\}$.
4. $\int\int\int_V z^2 dxdydz$ où $V = \{(x,y,z) \;\; / \;\; x^2+y^2 \leq z \leq h\}$, $h \geq 0$.

Exercice 2 *Calculer les intégrales en utilisant le changement de variables en coordonnées sphériques.*

1. $\int\int\int_V \sqrt{1-(x^2+y^2+z^2)} dxdydz$, où $V = \{(x,y,z) \;\; / \;\; x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.
2. $\int\int\int_V \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha} dxdydz$, $\alpha \neq 0$ et $V = \{(x,y,z) \;\; / \;\; 0 < a^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq b^2\}$; étude de l'existence d'une limite pour l'intégrale lorsque $a \to 0$.

Exercice 3 *Déterminer les volumes suivants :*

1. Volume compris entre le cône d'équation $x^2+y^2 = z^2$ et le paraboloïde de révolution d'équation $x^2+y^2 = z$
2. Volume délimité par le cylindre $x^2+y^2 = 4$ et les plans $y+z = 4$ et $z = 0$.
3. Volume délimité par le paraboloïde $a^2 z = h(a^2 - 4(x^2+y^2))$ et le plan $z = 0$.
4. Volume commun à la sphère $x^2+y^2+z^2 = a^2$ et au cylindre $x^2+y^2-ax = 0$.

Exercice 4 *Déterminer le volume du tore (i.e. chambre à air) de grand rayon R et de petit rayon r en faisant une intégration par tranches. Calculer son moment d'inertie par rapport à l'axe Oz, la densité étant homogéne égale à 1.*

Exercice 5 *Déterminer le volume de l'ellipsoïde plein E défini par $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$.*

1. Déterminer les moments d'inertie de E par rapport au plan xOz puis par rapport à l'axe Oz, la densité étant homogène.
2. Calculer l'intégrale $\int\int\int_V xyz.dxdydz$ où D est la partie de E située dans le trièdre des x, y et z positifs.

Exercice 6 *Soit V la partie de la boule $\{(x,y,z) \;\; / \;\; x^2+y^2+z^2 \leq a^2\}$ limitée par les plans $y = \pm(\tan\alpha)x$, $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, et $x \geq 0$. Déterminer le volume puis l'abscisse du centre de gravité de V, la densité étant homogène.*

Exercice 7 *Calculer la masse d'une boule S de centre O de rayon R, la densité étant définie en tout point M de S par : $\sigma(M) = \sqrt{1+\frac{OM}{R}}$.*

Exercice 8 *Calculer les moments d'inertie par rapport à l'axe $0z$ de $V_1 = \{(x,y,z) \;\; / \;\; x^2+y^2+z^2 \leq a^2\}$, et $V_2 = \{(x,y,z) \;\; / \;\; x^2+y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq R\}$, la densité des deux volumes étant homogène.*