UNIVERSITE DE CAEN Année universitaire 2006-2007
U.F.R. DE SCIENCES

Deug SM 2 - Feuille 1

Exercice 1 ***Ouverts***

1. *Montrer que la partie suivante du plan est un ouvert pour la distance euclidienne :* $U = \{(x,y)/\ -1 < x < 1 \text{ et } -1 < y < 1\}$.
2. *Même question pour* $V = \{(x,y)/\ -1 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 1-x\}$.
3. *Montrer que l'intersection de deux boules ouvertes est un ensemble ouvert.*

Exercice 2 ***Ensembles de définition de fonctions de plusieurs variable.***

Déterminez et représentez l'ensemble de définitions des fonction de plusieurs variables suivantes :

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$$
$$f(x,y) = \ln(\frac{x+y}{x-y})$$
$$f(x,y) = y^2 \arctan(\frac{x}{y})$$

Exercice 3 ***Dérivées partielles :***

Calculer les dérivées partielles premières puis secondes des fonctions suivantes

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$$
$$f(x,y) = \ln(\frac{x+y}{x-y})$$
$$f(x,y) = y^2 \arctan(\frac{x}{y}) \text{ pour } x > 0$$
$$f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$$
$$f(x,y) = \frac{kx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Exercice 4 *Soit la fonction* f *d'une variable et soit* g *définie par* $g(x,y) = f(x^2y)$, *montrer que* $x\frac{\partial g}{\partial x} - 2y\frac{\partial g}{\partial y} = 0$.

Exercice 5 *Soit la fonction f de deux variables définie par $f(x,y) = x\cos\frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}$, montrer que $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.*

Exercice 6 *Soient deux fonctions f et g d'une seule variables dérivables sur $\mathbb{R}$; on pose $F(x,y) = xf(\frac{y}{x})+g(\frac{y}{x})$ qu'on étudie sur le demi plan $P = \{(x,y)\ /\ x > 0\}$*

1. *Montrer que $x^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$.*
2. *Soit F une fonction de deux variables définie sur P telle que $x^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$; on pose $F = G(x, \frac{y}{x})$: quelle équation vérifie G en déduire la forme de F.*

Exercice 7 ***Intégrales doubles***
Calculer l'intégrale double

$$I = \int\int_D xydxdy$$

où D est l'un des domaines suivants :

D_1 est le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,0)$; D_2 est le triangle de sommets $(-1,0,\ (0,1),\ (2,0)$;

$$D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ /\ y \geq x^2, y^2 \leq x\};\quad D_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ /\ y \geq x^2, x^2+y^2 \leq 2, x \geq 0\};$$

$$D_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ /\ x^2+y^2 \leq 1, x \geq \frac{1}{2}, y \geq \frac{1}{2}\}$$

Exercice 8 *Calculer les intégrales doubles suivantes :*

1. $$I = \int\int_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy$$

   où

   $$D = \{(x,y)\ /\ x^2+y^2 \geq 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

2. $$I = \int\int_D \frac{y}{(1+x^2+y^2)^2}dxdy$$

   où

   $$D = \{(x,y)\ /\ x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}.$$

Exercice 9 *Calculer l'intégrale*

$$I = \int\int_D (2x^3 - y)dxdy$$

où D est le domaine déterminé par :

$$D = \{(x,y)\ /\ 0 \leq x, 0 \leq y, (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 \leq 1\}$$

où a et b sont deux réels positifs.

Exercice 10 *Calculer l'intégrale*

$$I = \int\int_D \frac{1}{(x+y)^2} dxdy$$

où D est le domaine déterminé par :

$$D = \{(x,y) | 1 \leq x, 1 \leq y, x+y \leq 3\}$$

.

Exercice 11 *On considère dans $\mathbb{R}^2$ le domaine D défini par :*

$$D = \{(x,y) \ / \ y \leq 4x, y \leq x^2, y \geq \frac{1}{x}\}.$$

1. *Dessiner D en hachurant ce domaine.*
2. *Calculer l'aire de D.*

Exercice 12 *On considère dans $\mathbb{R}^2$ le domaine défini par :*

$$D = \{(x,y) \ / \ 0 \leq x \leq 1+\sqrt{3},\ 0 \leq y,\ x^2+y^2-2x-2y \leq 2\}.$$

1. *Dessiner D en hachurant ce domaine.*
2. *Soit $h(t) = 1+\sqrt{3-t^2+2t}$. Déterminer le domaine de h, et trouver la valeur maximale M prise par h.*
3. *Soit*
$$g(x) = \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{3-x^2+2x} + 2\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)$$
Calculer la dérivée de $g(x)$.
4. *Calculer l'intégrale double $I = \int\int_D y\, dxdy$.*

Exercice 13 *(exercice de septembre 2005)*

1. *Calculer l'intégrale :*
$$J = \int_1^3 \frac{x^2}{(x^2+3)^2}\, dx.$$
On pourra utiliser le changement de variable $x = \sqrt{3}\tan u$ ou une intégration par parties.

Exercice 14 *Soit la partie D de $\mathbb{R}^2$ définie par $D = \{(x,y), |x \geq 1, y \geq 1, xy \leq 3\}$.*

1. *Representer D.*
2. *Calculer l'intégrale*
$$\int\int_D \frac{1}{(x+y)^3}\, dxdy.$$

Exercice 15 *Soit* $D = [0,\ 1] \times [0,\ 1]$. *Calculer*

$$\int\int_D \frac{xdxdy}{(1+x^2)(1+xy)}$$

de deux manières ; en déduire la valeur de

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$$

et de

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x}dx.$$

Exercice 16

1. *Calculer l'intégrale*

$$J = \int_1^3 \frac{x^2}{(x^2+3)^2}dx.$$

   (Indication : on pourra faire le changement de variable $x = \sqrt{3}\tan t$ *puis utiliser les formules trigonométriques, ou utiliser toute autre méthode convenable.)*

2. *On désigne par* D *la partie de* $\mathbb{R}^2$ *définie par*

$$D = \{(x, y)\ /\ x \geq 1,\ y \geq 1,\ xy \leq 3\ \}.$$

   En assimilant $\mathbb{R}^2$ *au plan euclidien rapporté à un repère orthonormé* $(O, \vec{i}, \vec{j})$, *représenter le domaine* D.

3. *Calculer l'intégrale*

$$I = \iint\limits_D \frac{1}{(x+y)^3}dxdy.$$