Université de Caen **Année universitaire 2006/2007**
U.F.R. Sciences **2^{e} session/septembre**

Licence 3 Mathématiques
Espaces métriques - EM51

Durée : 3 heures.

Chaque candidat doit, au début de l'épreuve, porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage après avoir été pointé. Il devra en outre porter son numéro de place sur chacune des copies, intercalaires, ou pièces annexées.

Documents et calculatrices non autorisés.

Question de cours

Démontrer le résultat suivant :

Théorème [Heine] *Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques, et f une application continue de (X, d) dans (Y, δ). Si (X, d) est compact, alors f est uniformément continue.*

Exercice I

Dans cet exercice, on munit $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ de la distance euclidienne. Les ensembles suivants sont-ils fermés, compacts ? Donner leur adhérence lorsqu'ils ne sont pas fermés.

1. $A := \{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.
2. $B := \left\{\frac{\ln(n)}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}\right\}$.
3. $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = -2, x > 0\}$.
4. $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2xy + 3y^2 > 0\}$.

Exercice II

Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et λ un réel tel que $|\lambda(b - a)| < 1$. On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ des applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$ (*i.e.* $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$).

On considère sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ la fonction T définie par :

$$T(f) : x \mapsto \lambda \int_a^x \sin(f(t))dt + \sin(x)$$

1. Montrer que la fonction T est bien définie sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ et à valeurs dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.
2. Pour tous f, g dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ et tout x dans $[a, b]$, montrer que l'on a :

$$|T(f)(x) - T(g)(x)| \leq |\lambda|(x - a)\|f - g\|_\infty.$$

3. Montrer qu'il existe une unique application $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) = \lambda \int_a^x \sin(f(t))dt + \sin(x).$$

Exercice III

On fixe un nombre premier p. Pour tout $a \in \mathbb{Z}^*$, on note $v_p(a)$ l'unique entier k tel que $a = p^k a'$, où a' est un entier non divisible par p (autrement dit $p^{v_p(a)}$ est la plus grande puissance de p divisant a). On considère sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'application d définie par :

$$d(a,b) = \begin{cases} p^{-v_p(a-b)} & \text{si} \quad a \neq b \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, calculer $d(p^n, p^m)$.
2. Montrer que, pour tous $u, v \in \mathbb{Z}$, on a $d(u-v, 0) \leq \max\{d(u,0), d(v,0)\}$.
3. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{Z}$ (d est appelée distance p-adique).
4. Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $\varepsilon > 0$. Montrer que pour tout $b \in B(a,\varepsilon)$, on a $B(b,\varepsilon) = B(a,\varepsilon)$.

Problème

Soit un entier strictement positif n. On notera $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus n. On fixe pour la suite un polynôme $P_0 \in \mathbb{R}[x]_{\leq n}$ ayant n racines réelles distinctes :

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n.$$

Le but du problème est de montrer un résultat de continuité des racines d'un polynôme comme fonctions de ses coefficients. Plus précisément si un polynôme P est suffisamment proche de P_0, alors il possède également n racines réelles distinctes.

---

1. Montrer qu'il existe un réel $r > 0$ tel que les intervalles $[\lambda_k - r, \lambda_k + r]$ (pour $k = 1, \ldots, n$) soient deux à deux disjoints.
2. Montrer que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on peut trouver des réels a_k, b_k dans $[\lambda_k - r, \lambda_k + r]$ tels que $P_0(a_k)P_0(b_k) < 0$.
3. Pour tout élément $Q = q_0 + q_1 x + \cdots + q_n x^n$ de $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ on pose :

$$\|Q\| = \max\{|q_0|, \ldots, |q_n|\} \quad \text{et} \quad N(Q) = \sup_{x \in [\lambda_n - r, \lambda_1 + r]} |Q(x)|.$$

   On admet que $\|\cdot\|$ et N sont des normes sur $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$.

   (a) Montrer **sans calcul** que les normes N et $\|\cdot\|$ sont équivalentes.

   (b) Trouver un réel β strictement positif tel que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}[x]_{\leq n}, \quad N(Q) \leq \beta \|Q\|.$$

   (c) Soit $P \in \mathbb{R}[x]_{\leq n}$ tel que

$$\|P - P_0\| < \frac{1}{\beta} \cdot \min\Big\{|P_0(a_1)|, \ldots, |P_0(a_n)|, |P_0(b_1)|, \ldots, |P_0(b_n)|\Big\}.$$

   Montrer que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a $P(a_k)P(b_k) < 0$. En déduire que P a n racines distinctes.