Université de Caen **Année universitaire 2005-2006**
U.F.R. Sciences **Session de septembre**

Licence 3 Mathématiques

Espaces métriques - EM51

Durée : 3 heures.

Chaque candidat doit, au début de l'épreuve, porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage après avoir été pointé. Il devra en outre porter son numéro de place sur chacune des copies, intercalaires, ou pièces annexées.

Le barème est donné à titre indicatif

Question de cours (4 points)

Démontrer le résultat suivant :

Proposition. *Soient (X, d) un espace métrique complet, et f une application contractante de X dans X. Alors f possède un unique point fixe (c'est-à-dire un point $L \in X$ tel que $f(L) = L$) dans X. De plus, pour tout $a \in X$, la suite (x_n) définie par $x_0 = a$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers L.*

Exercice I (4 points)

On considère l'ensemble $E := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \neq x_2\}$ et on pose :

$$E^+ := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > x_2\} \quad \text{et} \quad E^- := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 < x_2\}.$$

1. Montrer que E^+ et E^- sont ouverts.
2. En déduire que E n'est pas connexe.
3. On considère l'application
$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & E \\ & (x, h) & \longmapsto & (x + h, x) \end{array}$$
Exprimer E^+ et E^- comme images par ψ de parties de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
4. En déduire que E^+ et E^- sont connexes.

Exercice II (4,5 points)

Dans cet exercice, on munit $\mathbb{R}^2$ de la distance usuelle. Les ensembles suivants sont-ils fermés, compacts ?

1. $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^3 < 2\}$.
2. $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y + y^2 \leq 0\}$.
(On pourra étudier les variations de la fonction $y \mapsto y + y^2$.)
3. $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin(x) + y^2 + 1 \leq 0\}$.

Problème (10 points)

On se place dans l'espace $\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ des applications de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ continues et bornées, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ de la convergence uniforme, c'est-à-dire :

$$\forall f \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+), \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f(x)|.$$

On munit de plus $\mathbb{R}^2$ de la distance d_1 définie pour tous $(a,b),(a',b') \in \mathbb{R}^2$ par :

$$d_1\big((a,b),(a',b')\big) = |a-a'| + |b-b'|.$$

On considère enfin l'application $\phi\ :]0,+\infty[^2 \to \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ définie pour tout $(a,b) \in]0,+\infty[^2$ par :

$$\begin{array}{rccl} \phi(a,b) : & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} a(1-bx) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{b} \\ 0 & \text{si } x > \frac{1}{b} \end{cases} \end{array}$$

1. Pour tout $(a,b) \in]0,+\infty[^2$, tracer le graphe de la fonction $\phi(a,b)$ et calculer $\|\phi(a,b)\|_\infty$.
2. Soient $(a,b),(a',b') \in]0,+\infty[^2$ tels que $b \leq b'$.
   Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a les inégalités :
   $$\big|\phi(a,b)(x) - \phi(a',b')(x)\big| \leq \max\left\{|a-a'| + \frac{1}{b'}|ab-a'b'|, \frac{a}{b'}|b-b'|\right\} \leq 2\cdot|a-a'| + \frac{a}{b}\cdot|b-b'|.$$
3. En déduire, pour tous $(a,b),(a',b') \in]0,+\infty[^2$, l'inégalité :
   $$\|\phi(a,b) - \phi(a',b')\|_\infty \leq 2\cdot|a-a'| + \max\left\{\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}\right\}\cdot|b-b'|$$
4. Pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, on considère l'ouvert :
   $$E_\varepsilon := \{(a,b) \in]0,+\infty[^2 \mid a < \frac{1}{\varepsilon},\ b > \varepsilon\}.$$
   Montrer que ϕ est lipschitzienne de rapport $2\varepsilon^{-2}$ sur E_ε.
5. En déduire que ϕ est continue sur $]0,+\infty[^2$.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n := \{(a, \frac{1}{n}) \mid \frac{1}{n} \leq a \leq 1\}$ et $\mathcal{E}_n := \phi(A_n)$.
   Montrer que $\mathcal{E}_n$ est compact.
7. Montrer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, que ϕ est uniformément continue sur A_n, mais pas sur $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ (on pourra pour cela considérer la suite $\big(\phi(1,\frac{1}{n})\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$).
8. Soit $\Big(\phi(a_k, \frac{1}{n_k})\Big)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{E}_n$ qui converge vers un élément $f \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$.
   Montrer que les suites $\Big(\phi(a_k, \frac{1}{n_k})(0)\Big)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\Big(\phi(a_k, \frac{1}{n_k})(1)\Big)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent, et donner leurs limites.
9. En déduire que ϕ est un homéomorphisme de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ sur $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{E}_n$.