Université de Caen Année universitaire 2006-2007
UFR des Sciences

Licence de Mathématiques — Espaces métriques (EM 51)
Partiel du 25 novembre 2006 (corrigé)

****

QUESTIONS DE COURS

Voir cours.

EXERCICE 1

(1) Posons $X = \{(x, y) \in E \mid 0 < x < 1\}$. Les trois distances étant équivalentes, X est ouvert pour l'une des distances si et seulement si il est ouvert pour l'une des deux autres distances. Montrons donc que X est ouvert pour la distance δ_∞ définie par $\delta_\infty((x, y), (x', y')) = \max(|x - x'|, |y - y'|)$. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f((x, y)) = x$. L'application f est 1-lipschitzienne sur E (car $|f((x, y)) - f((x', y'))| = |x - x'| \leq \delta_\infty((x, y), (x', y')))$ et donc f est continue sur E. De ce fait, l'image réciproque par f d'un ouvert de $\mathbb{R}$ est un ouvert de E. Or, $]0, 1[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et $X = f^{-1}(]0, 1[)$. D'où, X est un ouvert de E.
(2) Soit $Y = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. Posons $x_n = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Y et $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$. Donc 0 est dans $\overline{Y}$. Mais, 0 n'est pas dans Y. Donc $\overline{Y} \neq Y$, ce qui montre que Y n'est pas fermé. D'autre part, $\frac{1}{2}$ est dans Y. Mais pour tout $\epsilon > 0$, le nombre $\frac{1}{2} + \min(\frac{1}{4}, \frac{\epsilon}{4})$ n'est pas dans Y, puisque ce dernier est dans $]\frac{1}{2}, 1[$ et que $Y \cap [\frac{1}{2}, 1] = \{\frac{1}{2}, 1\}$. Donc, pour tout $\epsilon > 0$, la boule $B(\frac{1}{2}, \epsilon)$ n'est pas incluse dans Y. donc Y n'est pas ouvert.

EXERCICE 2

(1)(a) Supposons que $\tilde{x} = \tilde{y} = \tilde{z}$. Dans ce cas, on a

$$\delta(x, z) = d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = \delta(x, y) + \delta(y, z).$$

(b) Supposons que $\tilde{x} = \tilde{y} \neq \tilde{z}$. Dans ce cas,

$$\delta(x, z) = d(x, \tilde{x}) + d(\tilde{x}, \tilde{z}) + d(\tilde{z}, z) \leq d(x, y) + d(y, \tilde{x}) + d(\tilde{x}, \tilde{z}) + d(\tilde{z}, z) = d(x, y) + (d(y, \tilde{y}) + d(\tilde{y}, \tilde{z}) + d(\tilde{z}, z)) = \delta(x, y) + \delta(y, z).$$

(c) Supposons que $\tilde{x} = \tilde{z} \neq \tilde{y}$. Dans ce cas,

$$\delta(x,z) = d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \leq$$
$$d(x,\tilde{x}) + d(\tilde{x},\tilde{y}) + d(\tilde{y},y) + d(y,\tilde{y}) + d(\tilde{y},\tilde{z}) + d(\tilde{z},z) = \delta(x,y) + \delta(y,z)$$

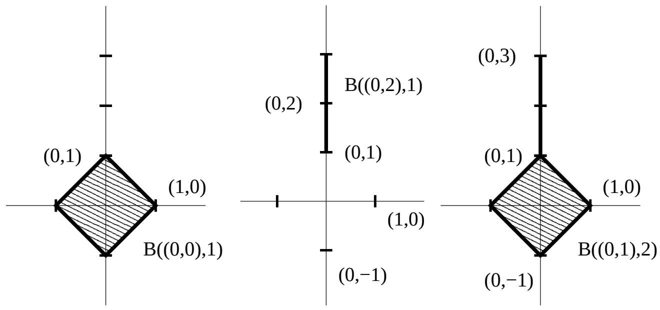
(d) Supposons que $\tilde{x} \neq \tilde{y}$, $\tilde{x} \neq \tilde{z}$ et $\tilde{y} \neq \tilde{z}$. Alors, on a

$$\begin{aligned}\delta(x,z) = d(x,\tilde{x}) + d(\tilde{x},\tilde{z}) + d(\tilde{z},z) &\leq d(x,\tilde{x}) + (d(\tilde{x},\tilde{y}) + d(\tilde{y},\tilde{z})) + d(\tilde{z},z)\\ &\leq d(x,\tilde{x}) + d(\tilde{x},\tilde{y}) + 2d(y,\tilde{y}) + d(\tilde{y},\tilde{z}) + d(\tilde{z},z) = \delta(x,y) + \delta(y,z).\end{aligned}$$

(2) (a) Pour tout x, y de E, le réel $\delta(x,y)$ est positif comme somme finie de nombres positifs. Si $x = y$, alors $\tilde{x} = \tilde{y}$ et $\delta(x,y) = d(x,y) = 0$. Réciproquement supposons que $\delta(x,y) = 0$ pour x, y dans E. Si $\tilde{x} = \tilde{y}$, alors $0 = \delta(x,y) = d(x,y)$. Ceci implique que $x = y$, puisque d est une distance. Si $\tilde{x} \neq \tilde{y}$, alors $0 = \delta(x,y) = d(x,\tilde{x}) + d(\tilde{x},\tilde{y}) + d(\tilde{y},y)$. Puisque chacun des termes de la somme est positif, ceci impose $d(x,\tilde{x}) = d(\tilde{x},\tilde{y}) = d(\tilde{y},y) = 0$. Comme d est une distance, on obtient $x = \tilde{x} = \tilde{y} = y$, ce qui est impossible puisque $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ sont distincts par hypothèse. D'où $\delta(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y$.
(b) Si $\tilde{x} = \tilde{y}$, alors $\delta(x,y) = d(x,y) = d(y,x) = \delta(y,x)$. Si $\tilde{x} \neq \tilde{y}$, alors $\delta(x,y) = d(x,\tilde{x}) + d(\tilde{x},\tilde{y}) + d(\tilde{y},y) = d(x,\tilde{x}) + d(\tilde{y},\tilde{x}) + d(\tilde{y},y) = \delta(y,x)$.
(c) Pour montrer que δ est une distance sur E, il reste à montrer que pour tout x, y, z de E, on a $\delta(x,z) \leq \delta(x,y) + \delta(y,z)$. Dans la question (1), on a montrer que cette inégalité est vérifiée dans un certain nombre de cas. Le seul cas non traité par la question (1) est la cas $\tilde{x} \neq \tilde{y} = \tilde{z}$. Mais dans ce dernier cas, l'inégalité est une conséquence du cas (b) de la question (1) et de la propriété de symétrie de δ : $\delta(x,z) = \delta(z,x) \leq \delta(z,y) + \delta(y,x) = \delta(x,y) + \delta(y,z)$. Donc, δ est bien une distance sur E.
(3) Si (x,y) est dans E, on déduit facilement des formules définissant δ que $\delta((x,y),(0,0)) = |x| + |y|$. Donc, $B_\delta((0,0),1)$ est égale à la boule de E de centre $(0,0)$ pour la distance fondamentale δ_1. C'est donc un losange dont les sommets sont les points (i,j) avec i, j dans $\{-1,1\}$. Si (x,y) est dans E avec x différent de 0, alors $\delta((0,1),(x,y)) = 1 + |x| + |y| > 1$. Donc

$$B_\delta((0,1),1) = \{(0,y) \in E \mid |y-1| < 1\} = \{(0,y) \mid y \in]0,2[\}.$$

Enfin, si (x,y) est dans E avec x différent de 0, on déduit immédiatement des formules que $\delta((0,1),(x,y) = 1 + |x| + |y| = 1 + \delta((0,0),(x,y))$. Donc, (x,y) est dans $B_\delta((0,1),2)$, si et seulement si $x = 0$ et y est dans $[-1,2]$, ou bien (x, y) est dans $B_\delta((0,0),1)$. D'où,



(4) L'exemple de la question (3) montre immédiatement que les distances d et δ ne sont pas ne sont pas topologiquement équivalentes : En effet, dans cet exemple, la boule $B_\delta((0,1),1)$ est ouverte pour δ alors qu'elle n'est pas ouverte pour d (par exemple, pour tout $\epsilon > 0$, l'élément $(\frac{\epsilon}{2}, 1)$ n'est pas dans $B_\delta((0,1),1)$, et donc la boule $B_d((0,1),\epsilon)$ n'est jamais incluse dans $B_\delta((0,1),1)$). Puisque d et δ ne sont pas nécessairement topologiquement équivalentes, elles ne sont pas nécessairement équivalentes (deux distances équivalentes sont topologiquement équivalentes).

PROBLEME

Partie 1

(1) Par hypothèse, O est compact; donc il est borné, et il existe $M > 0$ tel que pour tout y de O, on a $\|y\| \le M$. Soit n dans $\mathbb{N}$. Comme $f(O)$ est inclus dans O, par récurrence sur n, on voit facilement que pour tout entier n le vecteur $f^n(x)$ est dans O. On en déduit que

$$\|f(F_n(x)) - F_n(x)\| = \|\frac{1}{n+1}(f^{n+1}(x) - x)\| \le \frac{1}{n+1}(\|f^{n+1}(x)\| + \|x\|) \le \frac{2M}{n+1}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{2M}{n+1} = 0$, on a aussi $\lim_{n\to+\infty} \|f(F_n(x)) - F_n(x) - 0\| = 0$, ce qui signifie (par définition) que $\lim_{n\to+\infty} f(F_n(x)) - F_n(x) = 0$.

(2) On a vu au cours de la première question que pour tout entier n, le vecteur $f^n(x)$ est dans O. D'autre part, pour $n \ge 1$ on a

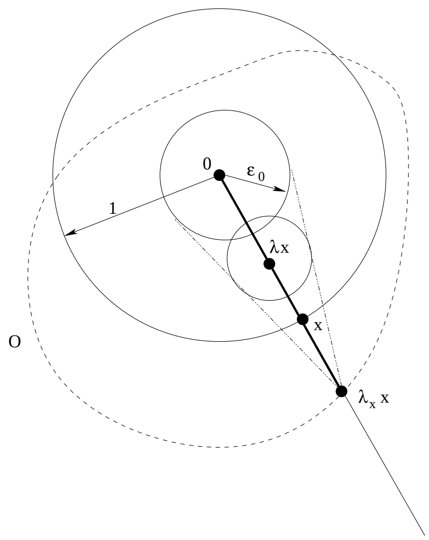
$$F_n(x) = \frac{1}{n+1} f^n(x) + \frac{n}{n+1} F_{n-1}(x) = \frac{1}{n+1} f^n(x) + (1 - \frac{1}{n+1}) F_{n-1}(x).$$

Puisque $\frac{1}{n+1}$ est dans $[0,1]$ et que O est convexe. on on obtient par récurrence sur n que $F_n(x)$ est dans O pour tout entier n (Pour $n = 0$, on a $F_0(x) = x$ qui est bien dans O).

(3) Considérons la suite $(F_n(x))_{n\ge 0}$. C'est une suite de O, qui est compact.

Donc, cette suite possède une sous-suite $(F_{\varphi(n)}(x))_{n\geq 0}$ qui converge dans O vers un certain élément y (de O). Puisque l'application f est continue sur E, la suite $(f(F_{\varphi(n)}(x)))_{n\geq 0}$ converge vers $f(y)$. Ceci implique que la suite $(f(F_{\varphi(n)}(x)) - F_{\varphi(n)}(x))_{n\geq 0}$ converge vers $f(y) - y$ dans E. Mais cette suite est une sous-suite de la suite $(f(F_n(x)) - F_n(x))_{n\geq 0}$, qui converge vers 0 d'après la question (2). La suite $(f(F_{\varphi(n)}(x)) - F_{\varphi(n)}(x))_{n\geq 0}$ converge donc aussi vers 0. Par unicité de la limite, on a $f(y) - y = 0$ et y est un point fixe de f.
(4) L'application $\psi : E \to E$ définie par $\psi(x) = f(x) - x$ est continue, puisque f est continue. Or $\mathrm{Fix}(f) = \psi^{-1}(\{0\})$ et $\{0\}$ est fermé puisque c'est un singleton. L'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé. Donc $\mathrm{Fix}(f)$ est fermé dans E. Les compacts sont fermés, donc O est aussi fermé dans E. Ceci implique que $\mathrm{Fix}(f) \cap O$ est un fermé de E, puisqu'une intersection finie de fermés est fermé. On a donc que $\mathrm{Fix}(f) \cap O$ est un fermé de E; mais, il est inclus dans le compact O. D'après le cours, cela implique que $\mathrm{Fix}(f) \cap O$ est un compact de E. D'autre part, ce compact n'est pas vide puisqu'il contient l'élément y de la question (3).

Partie 2 (1) la sphère $S(0,1)$ est compacte, puisqu'elle est fermée et bornée dans l'espace vectoriel E qui est de dimension finie.
(2) (a) Soit x dans $S(0,1)$. Par hypothèse sur O, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que $B(0,\epsilon_0)$ est inclus dans O. Puisque $\|\frac{\epsilon_0}{2}x\| = \frac{\epsilon_0}{2}\|x\| = \frac{\epsilon_0}{2}$, le vecteur $\frac{\epsilon_0}{2}x$ est dans O est l'ensemble $Y_x = \{\lambda \in \mathbb{R}^+ \mid \lambda x \in O\}$ n'est pas vide. Puisque O est majoré par M (défini dans la question (1) de la partie 1), l'ensemble Y_x est aussi majoré par M (si λ est dans Y alors $\lambda = \lambda\|x\| = \|\lambda x\| \leq M$). Or, toute partie non vide et majorée possède une borne supérieure. Notons λ_x la borne supérieure de Y_x. Par définition de λ_x l'ensemble $\mathbb{R}^+x \cap O$ est inclus dans $[0, \lambda_x x]$ ($= \{t\lambda_x x \mid t \in [0,1]\}$). Maintenant, $\lambda_x = \sup Y_x$, donc il existe une suite $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ de Y_x qui tend vers λ_x. La suite $(\lambda_n x)_{n\geq 0}$ est alors une suite de O qui converge vers $\lambda_x x$. Mais O est compact donc fermé ; on en déduit que $\lambda_x x$ est dans O. Or 0 est dans O, par hypothèse, et O est convexe. Donc $[0, \lambda_x x]$ est dans O (et bien entendu dans $\mathbb{R}^+x$). D'où $\mathbb{R}^+x \cap O = [0, \lambda_x x]$.



(b) Soit λ dans $[0, \lambda_x[$. Il existe t dans $[0, 1[$ tel que $\lambda = t\lambda_x$. Soit ϵ_0 comme dans la question (1). Posons $\epsilon = (1-t)\epsilon_0$. Considérons z dans $B(\lambda x, \epsilon)$. Alors $z = \lambda x + (z - \lambda x) = t\lambda_x x + (1-t)\frac{1}{1-t}(z - \lambda x)$. Mais $\|\frac{1}{1-t}(z-\lambda x)\| = \frac{1}{1-t}\|(z-\lambda x)\| < \frac{1}{1-t}\epsilon = \epsilon_0$. Donc $\frac{1}{1-t}(z-\lambda x)$ est dans la boule $B(0, \epsilon_0)$ est par conséquent est dans O. Or O est convexe, donc $[\lambda_x x, \frac{1}{1-t}(z-\lambda x)]$ est inclus dans O; donc z est dans O et $B(\lambda x, \epsilon)$ est incluse dans O. D'où λx est dans l'intérieur de O pour tout λ dans $[0, \lambda_x[$.

(c) Puisque O est fermé, $\mathbb{R}^+ x \cap \delta(O)$ est inclus dans $\mathbb{R}^+ x \cap O$. Donc, $\mathbb{R}^+ x \cap \delta(O)$ est inclus dans $[0, \delta_x x]$. Mais $[0, \delta_x x[$ est inclus dans l'intérieur de O par la question précédente . Donc $\mathbb{R}^+ x \cap \delta(O)$ est vide si $\lambda_x x$ est dans l'intérieur de O, et $\mathbb{R}^+ x \cap \delta(O)$ est égal à $\{\lambda_x x\}$ sinon. Mais pour tout $\epsilon > 0$, le vecteur $(\lambda_x + \frac{\epsilon}{2})x$ n'est pas dans O (puisque $\mathbb{R}^+ x \cap O = [0, \lambda_x x]$) alors qu'il est dans $B(\lambda_x x, \epsilon)$ (puisque $\|\lambda_x + \frac{\epsilon}{2})x - \lambda_x x\| = \frac{\epsilon}{2})\|x\| = \frac{\epsilon}{2}$). Donc pour tout $\epsilon > 0$, $B(\lambda_x x, \epsilon)$ n'est pas inclus dans O. On en déduit que $\lambda_x x$ n'est pas un point intérieur à O et finalement que $\mathbb{R}^+ x$ coupe $\delta(O)$ uniquement au point $g(x) = \lambda_x x$.

(3) D'aprés le cours, $\delta(O)$ est fermé. Mais il est inclus dans, puisque O est fermé, $\delta(O)$ est inclus dans O. Donc $\delta(O)$ est un fermé qui est inclus dans un compact. Il est donc compact. Soit $\varphi : \delta(O) \to S(0, 1)$ définie par $\varphi(x) = \frac{x}{\|x\|}$. Notons que φ est bien définie puisque 0 n'est pas dans $\delta(O)$ (par hypothèse, 0 est intérieur à O). L'application φ est continue (comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas) sur le compact $\delta(O)$. De plus φ est bijective de $\delta(O)$ sur $S(0, 1)$ avec pour inverse la fonction g (par construction $g(x)$ est l'unique point de $(\mathbb{R}^+ \frac{x}{\|x\|}) \cap \delta(O))$. Donc φ est un homéomorphisme de $\delta(O)$ sur $S(0, 1)$ et son invere, qui est la

fonction g, est un homéomorphisme de $S(0,1)$ sur $\delta(O)$.
(4) Soit $\psi\ :\ \overline{B}(0,1)\to E$ définie par $\psi(x)=\|x\|g(\frac{x}{\|x\|})$ si x est différent de 0 et $\psi(0)=0$. Puisque g est continue et que $\overline{B}(0,1)-\{0\}$ est ouvert dans $\overline{B}(0,1)$, l'application ψ est continue sur $\overline{B}(0,1)$ en tout x différent de 0. Maintenant, pour $x\neq 0$ on a $\|\psi(x)\|\leq\|x\|M$ car $g(\frac{x}{\|x\|})$ est dans O. Donc $\lim_{x\to 0}\psi(x)=0=\psi(0)$. L'application ψ est continue sur $\overline{B}(0,1)$ et l'image de $[0,x]$ pour x dans $S(0,1)$ est $[0,\lambda_x x]$ par construction. Donc l'image de $\overline{B}(0,1)=\cup_{x\in S(0,1)}[0,x]$ est $\cup_{x\in S(0,1)}[0,\lambda_x x]=\cup_{x\in\delta(O)}[0,x]\subset O$. Mais O est aussi inclus dans $\cup_{x\in\delta(O)}[0,x]$ car si x est dans O, et non nul, alors x est dans $R^+\frac{x}{\|x\|}\cap O$. Ceci montre que l'image de ψ est O. Enfin, ψ est injective, car si $\psi(x)=\psi(y)$ avec x et y dans $\overline{B}(0,1)$, alors soit $x=y=0$, soit $\|x\|g(\frac{x}{\|x\|})=\|y\|g(\frac{y}{\|y\|})$. Mais ce dernier point impose $\frac{x}{\|x\|}=\frac{y}{\|y\|}$, puis $\|x\|=\|y\|$, et finalement $x=y$. Donc ψ est une application continue et injective sur $\overline{B}(0,1)$ d'image O. Puisque la boule $\overline{B}(0,1)$ est compacte (elle est fermée et bornée en dimension finie), ψ est un homéomorphisme de $\overline{B}(0,1)$ sur O.