Université de Caen
UFR des Sciences

Année universitaire 2006-2007

Licence de Mathématiques — Espaces métriques (EM 51)
Partiel du 25 novembre 2006 (2 heures)

****

Chaque candidat doit en début d'épreuve porter son nom dans le coin de la copie, qu'il cachera par collage après signature de la feuille d'émargement. Il devra en outre porter son numéro sur chacun des intercalaires.
Tous les documents (dont calculatrice et téléphone portable) sont interdits.

****

QUESTIONS DE COURS

(1) Rappeler la définition des trois distances fondamentales de $\mathbb{R}^2$ et pour chacune de ces distances dessiner la boule ouverte $B((0,0),1)$.
(2) Soit (E,d) un espace métrique. Soit a dans E et r un réel strictement positif. Montrer que $B(a,r)$ est un ouvert de E.

EXERCICE 1

Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de l'une des trois distances fondamentales.
(1) Montrer que l'ensemble $\{(x,y) \in E \mid 0 < x < 1\}$ est un ouvert de E.
(2) Montrer que l'ensemble $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ n'est ni ouvert ni fermé.

EXERCICE 2

Soit (E,d) un espace métrique. Soit A une partie non vide et fermée de E. On rappelle que pour x dans E, on pose $d(x,A) = \inf_{y\in A} d(x,y)$.
On suppose que pour tout x de E il existe un unique $\tilde{x}$ dans A tel que $d(x,A) = d(x,\tilde{x})$. On définit l'application $\delta : E \times E \to \mathbb{R}$ par

$$\begin{array}{ll} \delta(x,y) = d(x,y) & \text{si } \tilde{x} = \tilde{y}; \\ \delta(x,y) = d(x,\tilde{x}) + d(\tilde{x},\tilde{y}) + d(\tilde{y},y) & \text{sinon.} \end{array}$$

(1) Soit x,y,z dans E. Montrer que $\delta(x,z) \leq \delta(x,y) + \delta(y,z)$ dans chacun des cas suivants :
(a) $\tilde{x} = \tilde{y} = \tilde{z}$; (b) $\tilde{x} = \tilde{y} \neq \tilde{z}$; (c) $\tilde{x} = \tilde{z} \neq \tilde{y}$;
(d) $\tilde{x} \neq \tilde{y}$, $\tilde{x} \neq \tilde{z}$ et $\tilde{y} \neq \tilde{z}$.
(2) Montrer que δ est une distance sur E.

(3) On suppose que $E = \mathbb{R}^2$, muni de la distance euclidienne, et on considère $A = \{X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\}$. On a ainsi $\tilde{X} = (x_1, 0)$ pour $X = (x_1, x_2)$. Représenter graphiquement les boules suivantes (pour la distance δ) :
(a) $B((0,0),1)$;
(b) $B((0,2),1)$;
(c) $B((0,1),2)$.
(4) Les distances δ et d sont-elles nécessairement équivalentes, topologiquement équivalentes ?

PROBLÈME

On fixe $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et une partie O convexe compacte non vide de E.
On rappelle que O est convexe signifie que pour tous x, y de O et tout λ dans $[0,1]$, l'élément $\lambda x + (1-\lambda)x$ est dans O.
Les deux parties sont indépendantes.

Partie I:
Soit f une application linéaire continue de E dans E. On suppose que $f(O)$ est inclus dans O. On pose $F_n = \frac{1}{n+1}(Id_E + f + \cdots f^n)$ où f^n est $f \circ f \circ \cdots \circ f$ (composé n fois : $f^2 = f \circ f$). Soit x dans O.
(1) Montrer que $\lim_{n\to+\infty}(f(F_n(x)) - F_n(x)) = 0$
(2) Montrer que $F_n(x)$ est dans O pour tout entier n strictement positif (on pourra écrire $F_n(x)$ en fonction de x et de $F_{n-1}(x)$).
(3) Montrer que f possède un point fixe dans O.
On pose $\mathrm{Fix}(f) = \{x \in E \mid f(x) = x\}$.
(4) Montrer que $\mathrm{Fix}(x) \cap O$ est un compact non vide de E.

Partie II:
On suppose dans cette partie que E est de dimension finie. On suppose également que O est un voisinage de 0.
(1) Justifier que $S(0,1)$ est compact dans E.
(2) Soit x dans $S(0,1)$. On pose $\mathbb{R}^+x = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}^+\}$.
(a) Montrer que $\mathbb{R}^+x \cap O = [0, \lambda_x x]$ avec $\lambda_x = \sup\{\lambda \in \mathbb{R}^+ \mid \lambda x \in O\}$.
(b) Montrer que pour tout réel λ dans $[0, \lambda_x[$, le point λx est dans l'intérieur $\mathring{O}$ de O.
(c) Montrer que la demi-droite $\mathbb{R}^+x$ coupe la frontière $\delta(O)$ de O en un unique point, que l'on notera $g(x)$.
(3) Montrer que $\delta(O)$ est compact dans E puis que g est un homéomorphisme de $S(0,1)$ sur $\delta(O)$.
(4) À l'aide de l'homéomorphisme g, construire un homéomorphisme de $\overline{B}(0,1)$ sur O.