Université de Caen
U.F.R de Sciences

Année universitaire 2005-2006
Session : Janvier 2006

Licence de Mathématiques
Epreuve d'espace métriques 1^{er} semestre
Durée : 3 heures. Documents et calculatrices non autorisés

* * * *

Chaque candidat doit, au début de l'épreuve, porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage après avoir été pointé. Il devra en outre porter son numéro de place sur chacune des copies, intercalaires, ou pièces annexées. L'examen est constitué de 3 exercices et un problème indépendants et comporte 2 pages.

Exercice 1 (Question de cours)

Démontrer le résultat suivant :
"Soient E, F deux espaces normés, on suppose que E est de dimension finie. Soit f une application linéaire de E dans F. Alors f est continue."

Exercice 2

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni d'une des trois distances fondamentales.

1. Que peut on dire d'une partie de E qui est à la fois ouverte et fermée ?
2. Les ensembles suivants sont t-ils des ouverts ? des fermés ? des compacts de E :
   (a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^4 + 2z^6 \leq 1\}$;
   (b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^3 < 1\}$;
   (c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \cos^2(x) + \cos^2(y) + \cos^2(z) \leq 1\}$.

Exercice 3

On note d_1 la distance sur $\mathbb{R}$ associée à la valeur absolue et d_2 l'une des trois distances fondamentales sur $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ muni de la distance induite par d_1, n'est pas connexe.
2. Montrer que pour tout $M \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2 \setminus \{M\}$ muni de la distance induite par d_2, est connexe par arcs.
3. En déduire que $(\mathbb{R}, d_1)$ et $(\mathbb{R}^2, d_2)$ ne sont pas homéomorphes.

Problème

E désigne l'ensemble des suites $X = (x_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $[0, 1]$. On pose pour $X = (x_n)_{n\geq 1} \in E$ et $Y = (y_n)_{n\geq 1} \in E$,

$$d(X, Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n-1}|x_n - y_n|$$

1. Montrer que d est une distance sur E.

2. Sur $\mathbb{R}^N$ on prend la distance d_N définie par $d_N(x,y) = \sup_{1\le n\le N} |x_n - y_n|$ pour tout $x = (x_1, \ldots, x_N)$ et tout $y = (y_1, \ldots, y_N)$.

   (a) Pour un point $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^N$, déterminer $B_N(a,r)$ la boule ouverte de $\mathbb{R}^N$ de centre a et de rayon $r > 0$, en l'exprimant comme un produit d'ensembles simples de $\mathbb{R}$.

   (b) Montrer que pour tout $r > 0$, $[0,1]^N \subset \cup_{a\in[0,1]^N} B_N(a,r)$.

   (c) En déduire que pour tout $r > 0$, il existe un nombre fini de points $A^i = (a_1^i, \ldots, a_N^i) \in [0,1]^N$ $(i = 1, \ldots, r)$, tels que

$$[0,1]^N \subset \cup_{i=1}^{r} B_N(A^i, r) \quad (*)$$

3. On se place dans (E,d).

   Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On fixe aussi N vérifiant $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} 2^{-n-1} < \frac{\varepsilon}{2}$.
   Soient $A^1, \ldots, A^r$ les points de $[0,1]^N$ vérifiant la relation $(*)$ pour $r = \frac{\varepsilon}{2}$.

   On définit ensuite pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$ $X^i = (x_n^i)_{n\ge 1} \in E$ par $x_n^i = a_n^i$ pour $n \le N$ et $x_n^i = 0$ pour $n \ge N+1$.
   Soit $X = (x_n)_{n\ge1} \in E$.

   (a) Montrer qu'il existe $i \in \{1, \ldots, r\}$ tel que $(x_1, \ldots, x_N) \in B_N(A^i, \frac{\varepsilon}{2})$.

   (b) En déduire que $d(X, X^i) < \varepsilon$.

   (c) Que peut on en conclure pour E et les boules $B(X^i, \frac{\varepsilon}{2})$ $(i = 1, \ldots, r)$ de (E,d) ?

4. Le but de cette question est de montrer que (E,d) est complet.
   Soit $(Y^p)_{p\ge1}$ une suite de Cauchy de E. On note $Y^p = (y_n^p)_{n\ge1}$.

   (a) On fixe $n \ge 1$, montrer que pour tout $p, q \ge 1$ on a $|y_n^p - y_n^q| \le 2^{n+1} d(X^p, X^q)$. En déduire que la suite $(y_n^p)_{p\ge1}$ converge lorsque p tend à l'infini vers un élément $y_n \in [0,1]$.

   (b) Soit $\varepsilon > 0$, puisque la suite $(Y^p)_{p\ge1}$ est de Cauchy, il existe $p_0 = p_0(\varepsilon) \ge 1$ tel que $\forall p, q \ge p_0 :\ d(Y^p, Y^q) < \frac{\varepsilon}{2}$. On fixe un entier $M \ge 1$.

      i. Montrer que si $p, q \ge p_0$ alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{M} \frac{|y_n^p - y_n^q|}{2^{n+1}} < \frac{\varepsilon}{2}$.

      ii. En déduire que pour tout $p \ge p_0$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{M} \frac{|y_n^p - y_n|}{2^{n+1}} \le \frac{\varepsilon}{2}$.

   (c) En déduire que $(Y^p)_{p\ge1}$ converge vers $Y = (y_n)_{n\ge1}$ dans (E,d) et conclure.

5. En déduire que (E,d) est compact.

* * * * * *

Fin