Université de Caen — Année universitaire 2007-2008
UFR des Sciences

Licence de Mathématiques — Espaces métriques (EM 51)
Examen de février 2008 (3 heures)

Cours: voir cours

Exercice

(1) Soit f et g dans E et λ, μ dans $\mathbb{R}$. Soit x dans $\mathbb{R}$.On a:

$$\Phi(\lambda f+\mu g)(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-x)^2}(\lambda f(t)+\mu g(t))dt=$$

$$\lambda\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-x)^2}f(t)dt+\mu\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-x)^2}g(t)dt=\lambda\Phi(f)(x)+\mu\Phi(g)(x)$$

Donc pour tout x de $\mathbb{R}$ on a $\Phi(\lambda f+\mu g)(x)=\lambda\Phi(f)(x)+\mu\Phi(g)(x)$. D'où $\Phi(\lambda f+\mu g)=\lambda\Phi(f)+\mu\Phi(g)$, et Φ est linéaire. De plus, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a

$$|\Phi(f)(x)|=|\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-x)^2}f(t)dt|\leq\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-x)^2}|f(t)|dt\leq$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-x)^2}\|f(t)\|_\infty dt=\|f(t)\|_\infty\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-x)^2}dt.$$

Maintenant, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-x)^2}dt=\lim_{X\to+\infty}\int_{-X}^{X} e^{-(t-x)^2}dt=$$

$$\lim_{X\to+\infty}\int_{-(X+x)}^{X-x} e^{-t^2}dt=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt$$

(car cette dernière intégrale est convergente). D'où, $|\Phi(f)(x)|\leq\frac{1}{2}\|f\|_\infty$ pour tout x de $\mathbb{R}$, et $\|\Phi(f)\|_\infty\leq\|f\|_\infty$ pour tout f dans E. On en déduit que Φ est continue et $|||\Phi|||\leq\frac{1}{2}$. Considérons $f_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f_0(x)=1$ pour tout x de $\mathbb{R}$. f_0 est constante donc continue et bornée sur $\mathbb{R}$. Donc f_0 est dans E et on a $\|f_0\|_\infty=1$. De plus on a $\Phi(f_0)(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-x)^2}dt=\frac{1}{2}$ pour x dans $\mathbb{R}$, comme vu plus haut. Donc $\Phi(f_0)$ est aussi une fonction constante (qui vaut $\frac{1}{2}$) et $\|\Phi(f_0)\|_\infty=\frac{1}{2}$. Ceci implique $|||\Phi|||\geq\frac{\|\Phi(f_0)\|_\infty}{\|f_0\|_\infty}=\frac{1}{2}$. On en dduite finallement que

$$|||\Phi|||=\frac{1}{2}.$$

(2) On fixe h dans E. Soit $\Psi:E\to E$ définie par $\Psi(f)=\Phi(f)+h$ pour tout f dans E. Alors pour tout f,g dans E, on a $\|\Psi(f)-\Psi(g)\|=\|\Phi(f)+h-(\Phi(g))+h\|=\|\Phi(f)-\Phi(g)\|=\|\Phi(f-g))\|\leq\frac{1}{2}\|f-g\|$. Donc Φ est contractante. Mais d'après le cours E est complet, car $\mathbb{R}$ l'est. Donc d'après le théorème du point fixe, il existe une unique application f dans E tel que $\Psi(f)=f$. d'où, il existe une unique fonction f dans E telle que $\forall x\in\mathbb{R}$, $\Phi(f)(x)+h(x)=f(x)$.

Problème

Partie I : distances sur Ω

1) Soit x dans E, et X, Y dans Ω. Soit M et N dans $\mathbb{R}$ tels que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $d(x, X(n)) \leq M$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ d(x, Y(n)) \leq N$. Alors, pour tout entier n on a

$$0 \leq d(X(n), Y(n)) \leq d(X(n), x) + d(Y(n), x) \leq M + N.$$

Donc l'ensemble $\{d(X(n), Y(n)) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est minoré par 0 et majoré. Donc $\sup\{d(X(n), Y(n)) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est un réel positif: l'application δ_∞ est à valeur dans $\mathbb{R}^+$. Si $\delta_\infty(X, Y) = 0$, alors pour tout entier n, $d(X(n), Y(n)) = 0$. Puisque d est une distance sur E, on a alors $X(n) = Y(n)$ pour tout entier n; c'est-à-dire $X = Y$. La réciproque est immédiate. La propriété de symétrie est claire :

$$\delta_\infty(X, Y) = \sup\{d(X(n), Y(n)) \mid n \in \mathbb{N}\} = \sup\{d(Y(n), X(n)) \mid n \in \mathbb{N}\} = \delta_\infty(Y, X).$$

Enfin si Z est aussi dans Ω, pour tout entier n, on a

$$d(X(n), Z(n)) \leq d(X(n), Y(n)) + d(Y(n), Z(n)) \leq \delta_\infty(X, Y) + \delta_\infty(Y, Z).$$

Donc $\delta_\infty(X, Z) \leq \delta_\infty(X, Y) + \delta_\infty(Y, Z)$. Ainsi, δ_∞ est une distance sur Ω.

2) Si n, m sont dans $\mathbb{N}$ avec $n \geq m$ alors $0 < 2^{-n} = \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^m} = 2^{-m}$. Soit X, Y dans Ω. On a $0 \leq \delta(X, Y) \leq 2^0 = 1$. En particulier, l'application δ est à valeur dans $\mathbb{R}^+$, et par définition de δ, on a $\delta(X, Y) = 0$ si et seulement si $X = Y$. Il est clair que $\delta(X, Y) = \delta(Y, X)$. Supposons que Z est aussi dans Ω. Il est clair que si $X = Y$ ou $X = Z$ ou $Y = Z$, alors $\delta(X, Z) \leq \delta(X, Y) + \delta(Y, Z)$. Supposons que X, Y, Z sont deux à deux distincts ; notons $n_1 = \inf\{m \in \mathbb{N} \mid X(m) \neq Y(m)\}$, $n_2 = \inf\{m \in \mathbb{N} \mid Y(m) \neq Z(m)\}$ et $n_3 = \inf\{m \in \mathbb{N} \mid X(m) \neq Z(m)\}$. Si $m \leq \min(n_1, n_2)$, alors $Y(m) = X(m) = Z(m)$. Donc $n_3 \geq \min(n_1, n_2)$. D'où, $\delta(X, Z) = 2^{-n_3} \leq 2^{-\min(n_1, n_2)} \leq 2^{-n_1} + 2^{-n_2} = \delta(X, Y) + \delta(Y, Z)$. Donc δ est bien une distance sur Ω.

3) On a $B(X, 2) = \{Y \in \Omega \mid \delta(X, Y) < 2\}$ et $\overline{B}(X, \frac{1}{4}) = \{Y \in \Omega \mid \delta(X, Y) \leq \frac{1}{4}\}$. Dans la question précéente, on a vu que pour tout Y, on a $\delta(X, Y) \leq 1$. Donc $B(X, 2) = \Omega$. Soit Y dans Ω. Si $Y = X$, alors Y est dans $\overline{B}(X, \frac{1}{4})$. Supposons $Y \neq X$ et notons $n = \inf\{m \in \mathbb{N} \mid X(m) \neq Y(m)\}$. Alors Y est dans $\overline{B}(X, \frac{1}{4})$ si et seulement si $2^{-n} \leq \frac{1}{4} = 2^{-2}$, c'est-à-dire si $n \geq 2$. Donc $\overline{B}(X, \frac{1}{4}) = \{Y \in \Omega \mid Y(0) = X(0); Y(1) = X(1)\}$.

4) (a) L'application $\Psi : x \mapsto \Psi_x$ est un plongement isométrique de (E, d) dans (Ω, δ_∞) si pour tout x, y de E, on a $\delta_\infty(\Psi(x), \Psi(y)) = d(x, y)$. Soit x, y dans E. Pour tout entier positif n on a $d(\Psi_x(n), \Psi_y(n)) = d(x, y)$. Donc $\delta_\infty(\Psi(x), \Psi(y)) = \sup\{d(\Psi_x(n), \Psi_y(n)) \mid n \in \mathbb{N}\} = d(x, y)$.

(b) L'image d'un connexe par une application continue est connexe. Puisque E est connexe, pour montrer que Ψ n'est pas continue, il suffit de montrer que $\Psi(E)$ n'est pas connexe. Soit x dans E. D'après la question 3), $\overline{B}(\Psi(x), \frac{1}{4}) = \{Y \in \Omega \mid Y(0) = Y(1) = x\}$. Donc $\Psi(E) \cap \overline{B}(\Psi(x), \frac{1}{4}) = \{\Psi(x)\}$. Mais de la même façon, on a $B(\Psi(x), \frac{1}{2}) = \{Y \in \Omega \mid Y(0) = x\}$. Donc on a aussi $\Psi(E) \cap B(\Psi(x), \frac{1}{2}) = \{\Psi(x)\}$. D'où, $\{\Psi(x)\}$ est à la fois ouvert, fermé, non vide et dans $\Psi(E)$ et distinct de ce dernier. Donc $\Psi(E)$ n'est pas connexe et l'application Ψ n'est pas continue pour δ.

(c) Si δ et δ_∞ étaient équivalentes sur Ω, Ψ serait continue pour l'une si et seulement si elle est continue pour l'autre. Mais, L'application Ψ est un plongement isométrique de E sur Ω pour la distance Δ_∞. En particulier elle est continue pour la distance δ_∞. Mais Ψ n'est pas continue pour δ. donc les distances δ_∞ et δ ne sont pas équivalentes sur Ω.

Partie II : compacité

(1) L'application Ψ est un plongement isométrique de E dans Ω muni de δ_∞. Puisque E n'est pas borné, l'ensemble Ω n'est pas non plus borné pour δ_∞. Par conséquence, il n'est pas compact pour cette distance.

(2)On a vu que pour X dans Ω, l'ensemble Ω est égal à la boule ouverte $B(X,2)$ pour δ. Il est donc borné pour δ. (3) Non, l'ensemble Ω n'est pas compact pour δ bien qu'il est fermé et borné. Puisque E est infini, on peut choisir une suite injective $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E. Alors, $\delta(\Psi(x_n),\psi(x_m)) = 2^0 = 1$ pour tout entiers n,m distincts. En paticulier aucune sous-suite de la suite $(\Psi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'est de Cauchy pour δ. Donc la suite $(\Psi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne possède aucune sous-suite convergente pour δ. On en déduit que Ω n'est pas compact pour δ.

Partie III : complétude

(1) Soit $(X_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de Ω pour δ.

(a) Soit n dans $\mathbb{N}$ et ε tel que $0 < \varepsilon < \frac{1}{2^n}$. Puisque par hypothèse $(X_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, il existe $\varphi(n)$ dans $\mathbb{N}$ tels que pour tout $m, m' \geq \varphi(n)$, on a $\delta(X_m, X_{m'}) < \varepsilon$. Posons $y_n = X_{\varphi(n)}(n)$. Soit $m \geq \varphi(n)$. Alors, on a $X_m = X_{\varphi(n)}$, ou bien $X_m \neq X_{\varphi(n)}$ et $n+1 \leq \inf\{r \in \mathbb{N} \mid X_m(r) \neq X_{\varphi(n)}(r)\}$ puisque $2^{-\inf\{r\in\mathbb{N}\mid X_m(r)\neq X_{\varphi(n)}(r)\}} < \varepsilon < 2^{-n}$. Dans les deux cas, on trouve que $X_m(n) = X_{\varphi(n)}(n) = y_n$.

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier positif n tel que $2^{-n} \leq \varepsilon$. Posons

$$m_0 = \max\{\varphi(k) \mid 0 \leq k \leq n\}.$$

Pour $m \geq m_0$ et tout entier k avec $0 \leq k \leq n$, on a $m \geq \varphi(k)$ et donc $X_m(k) = y_k = Y(k)$. Donc, pour tout entier $m \geq m_0$, on a $X_m = Y$, ou bien $\inf\{k \in \mathbb{N} \mid X_m(k) \neq Y(k)\} \geq n$; dans les deux cas, on a $\delta(X_m, Y) \leq 2^{-n} < \varepsilon$ Donc $\lim_{m\to+\infty} X_m = Y$ pour la distance δ.

(c) Les questions (a) et (b) ont permis de montrer que toute suite de Cauchy de Ω pour la distance δ converge pour cette distance. Donc Ω est complet pour δ.

(2) Supposons que la suite $(X_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers Y dans Ω pour δ_∞. Alors on a $\lim_{m\to+\infty} \delta_\infty(X_m, Y) = 0$. Fixons un entier positif n. On a l'encadrement

$$0 \leq d(X_m(n), Y(n)) \leq \sup\{d(X_m(k), Y(k)) \mid k \in \mathbb{N}\} = \delta_\infty(X_m, Y).$$

Donc $\lim_{m\to+\infty} d(X_m(n), Y(n)) = 0$ et la suite $(X_m(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $Y(n)$ dans E pour la distance d.

(3) L'application Ψ est un plongement isométrique de E dans Ω. Donc E est complet si et seulement si $\Psi(E)$ est complet. Donc, si Ω est complet pour δ_∞ alors E est complet pour d si et seulement si $\Psi(E)$ est fermé dans Ω. Soit Y dans Ω et supposons qu'il existe $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\Psi(E)$ qui converge vers Y dans Ω pour δ_∞. Par hypothèse, pour tout entiers n,i,j, on a $X_n(i) = X_n(j)$. D'après la question (2), pour tout entie r n, on a

$$Y(n) = \lim_{m\to\infty} X_n(m) = \lim_{m\to\infty} X_0(m) = Y_0.$$

Donc Y est dans $\Psi(E)$, et ce dernier est donc fermé. D'où E est complet

(4) Si E complet, alors Ω est complet d'après le cours : si (F,d) est un espace metrique complet et A un ensemble, alors l'ensemble des applications bornées de A dans F est complet pour la norme de la convergence uniforme.