

Licence de Mathématiques — Espaces métriques (EM 51)
Examen de février 2008 (3 heures)

Chaque candidat doit en début d'épreuve porter son nom dans le coin de la copie, qu'il cachera par collage après signature de la feuille d'émargement. Il devra en outre porter son numéro sur chacun des intercalaires.

Tous les documents (dont calculatrice et téléphone portable) sont interdits. Le barème est indicatif

Cours (3,5 points)

1. Donner la définition d'un ensemble connexe. Quels sont les connexes de \mathbb{R} ? Donner un exemple d'ensemble qui est connexe sans être connexe pas arc.
2. Soit (E, d) un espace métrique. Donner la définition d'un sous-ensemble compact de E .

Exercice (3,5 points)

Soit E le \mathbb{R} -espace vectoriel des applications continues et bornées de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. On rappelle que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est égale à $\sqrt{\pi}$.

Pour tout élément f de E , on considère l'application $\Phi(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui à x associe :

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-x)^2} f(t) dt.$$

On admet que $\Phi(f)$ est bien définie et appartient à E .

1. Montrer que Φ est linéaire et continue. Calculer la norme de Φ .
2. On fixe h dans E . Montrer qu'il existe une unique fonction f dans E telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(f)(x) + h(x) = f(x)$$

Problème

On considère un espace métrique (E, d) connexe. On suppose que E n'est pas borné pour d . On rappelle que cela signifie que pour tout x de E et pour tout entier n , il existe y dans E tels que $d(x, y) \geq n$.

On note Ω l'ensemble des applications bornées $X : \mathbb{N} \rightarrow E$ de \mathbb{N} dans E ; c'est-à-dire, pour tout X de Ω et tout x de E , il existe M tel que $\forall n \in \mathbb{N}, d(x, X(n)) \leq M$.

Soit X, Y dans Ω . On pose

$$\delta_\infty(X, Y) = \sup\{d(X(n), Y(n)) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Si X et Y sont distincts et $n = \inf\{m \in \mathbb{N} \mid X(m) \neq Y(m)\}$, on pose

$$\delta(X, Y) = 2^{-n}.$$

Lorsque X et Y sont égaux, on pose $\delta(X, Y) = 0$.

Partie I : distances sur Ω (8 points)

1. Montrer que δ_∞ est une distance sur Ω .
2. Montrer que δ est une distance sur Ω .
3. Pour X dans Ω , déterminer la boule ouverte $B(X, 2)$ et la boule fermée $\overline{B}(X, \frac{1}{4})$ de Ω pour la distance δ .
4. Pour x dans E , on définit Ψ_x dans Ω par $\forall n \in \mathbb{N}, \Psi_x(n) = x$.
 - (a) Montrer que l'application $\Psi : x \mapsto \Psi_x$ est un plongement isométrique de (E, d) dans (Ω, δ_∞) .
 - (b) En utilisant la question 3. et la connexité de E , montrer que l'application Ψ n'est pas continue de (E, d) dans (Ω, δ) .
 - (c) Montrer que les distances δ_∞ et δ ne sont pas équivalentes sur Ω .

Partie II : compacité (3 points)

1. Montrer que Ω n'est pas compact pour δ_∞ .
2. Montrer que Ω est borné pour δ .
3. L'ensemble Ω est-il compact pour δ ?

Partie III : complétude (7 points)

1. Soit $(X_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de Ω pour δ .
 - (a) Montrer que pour tout entier n il existe y_n dans E et il existe $\varphi(n)$ dans \mathbb{N} tels que pour tout $m \geq \varphi(n)$, on a $X_m(n) = y_n$.
 - (b) Soit Y dans Ω défini par $Y(n) = y_n$. Montrer que la suite $(X_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers Y dans Ω pour δ .
 - (c) Montrer que Ω est complet pour δ .
2. Montrer que si $(X_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers Y dans Ω pour δ_∞ , alors pour tout entier n , la suite $(X_m(n))_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers $Y(n)$ dans E pour la distance d .
3. En utilisant l'application Ψ , montrer que si Ω est complet pour δ_∞ alors E est complet pour d .
4. Montrer que si E est complet pour d , alors Ω est complet pour δ_∞ .