corrigé de l'examen de L3 espace metrique de Janvier 2007

Eddy Godelle

QUESTIONS DE COURS : Voir cours
PROBLÈME 1 : On fixe n dans $\mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{C}$ de sa norme usuelle. On munit $M_n(\mathbb{C})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i,j\leq n}|a_{i,j}|$$

si les $a_{i,j}$ sont les coefficients de la matrice A.
Partie I :
(1) (a) $\varphi_z(0) = (1 + 0\cdot(r-1))e^{i\cdot 0\cdot\theta} = 1$ et $\varphi_z(1) = (1 + (r-1))e^{i\theta} = z$.
(b) L'application φ_z est continue comme composée et produit de fonctions continues. De plus, $[0,1]$ est connexe par arc puisque c'est un intervalle de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\varphi_z([0,1])$ est l'image par une application continue d'une partie connexe par arc de $\mathbb{R}$. Il est donc connexe par arc.
Soit x dans $\varphi_z([0,1])$ et t dans $[0,1]$ tel que $\varphi_z(t) = x$. Le module de x est $|x| = |1 + t(r-1)| = |1 - t + tr|$. Puisque t est dans l'intervalle $[0,1]$, on a $|x| = 1 - t + tr \geq \min(1,r) > 0$. Donc, x est non nul et $\varphi_z([0,1])$ est inclus dans $\mathbb{C}^*$.
(c) Pour tout nombre z de $\mathbb{C}^*$ l'ensemble $\varphi_z([0,1])$ est connexe par arc par la question (b). De plus, l'ensemble $\cap_{z\in\mathbb{C}^*}\varphi_z([0,1])$ est non vide puisqu'il contient 0. Donc, $\cup_{z\in\mathbb{C}^*}\varphi_z([0,1])$ est connexe par arc comme réunion de connexes par arc d'intersection non vide. Il est clair que $\mathbb{C}^*$ est égal à $\cup_{z\in\mathbb{C}^*}\varphi_z([0,1])$, puisque que ce dernier est par définition inclus dans $\mathbb{C}^*$ et que tout élément z de $\mathbb{C}^*$ est dans $\varphi_z([0,1])$. Donc $\mathbb{C}^\star$ est connexe par arc.
(2) $M_n(\mathbb{C})$ est un espace vectoriel de dimension finie. Il est donc complet et connexe. Par contre, $M_n(\mathbb{C})$ n'est pas compact pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ infinie, puisque qu'il n'est pas borné par linéarité de la norme.
(3) L'application déterminant de $M_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$ est continue car polynomiale en les coordonnées dans la base canonique de $M_n(\mathbb{C})$. Puisque dans $\mathbb{C}$, l'ensemble $\{0\}$ est un singleton, il est fermé et $\mathbb{C}^*$ est ouvert dans $\mathbb{C}$. Donc $GL_n(\mathbb{C})$ est ouvert dans $M_n(\mathbb{C})$, comme image réciproque d'un ouvert par une application continue. Le sous-ensemble $GL_n(\mathbb{C})$ n'est ni complet ni compact dans $M_n(\mathbb{C})$. En effet, toute partie complête ou compacte est fermée; mais $GL_n(\mathbb{C})$ n'est pas fermé puisqu'il est ouvert et que $M_n(\mathbb{C})$ est connexe.
(4) Soit $\mathbb{T}$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures inversibles de $GL_n(\mathbb{C})$.

Pour t dans $[0,1]$ on pose

$$\Upsilon_T(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{z_1}(t) & ta_{1,2} & \cdots & ta_{1,n} \\ 0 & \varphi_{z_2}(t) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & ta_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & \varphi_{z_n}(t) \end{pmatrix}.$$

(a) $\Upsilon_T(0) = Id_n$ et $\Upsilon_T(1) = \begin{pmatrix} \varphi_{z_1}(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varphi_{z_2}(0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \varphi_{z_n}(0) \end{pmatrix} = T$. Soit t dans $[0,1]$. Par définition de Υ_T, la matrice $\Upsilon_T(t)$ est triangulaire supérieure; de plus, $\det(\Upsilon_T(t)) = \varphi_{z_1}(t)\cdots\varphi_{z_n}(t)$. Donc $\det(\Upsilon_T(t))$ est non nul et la matrice Υ_T est dans $\mathbb{T}$.
(b) Soient t et t' dans $[0,1]$, alors

$$\begin{aligned}\|\Upsilon_T(t) - \Upsilon_T(t')\|_\infty = \max(\max_{1\le i\le n} |\varphi_{z_i}(t) - \varphi_{z_i}(t')|, \max_{1\le i<j\le n} |a_{i,j}(t-t')|) \le \\ \max_{1\le i\le n} |\varphi_{z_i}(t) - \varphi_{z_i}(t')| + \max_{1\le i<j\le n} |a_{i,j}(t-t')| \le \\ |t-t'|\|T\|_\infty + \max_{1\le i\le n} |\varphi_{z_i}(t) - \varphi_{z_i}(t')|.\end{aligned}$$

(c) On applique la méthode de la question (1)(c) Soit t dans $[0,1]$. Soit $\varepsilon > 0$. Chaque application φ_i est continue. Donc, pour chaque i il existe $\eta_i > 0$ tel que pour tout t' dans $[0,1]$ tel que $|t-t'| < \eta_i$, on a $|\varphi_{z_i}(t) - \varphi_{z_i}(t')| \le \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $\eta = \min(\frac{\varepsilon}{2}\|T\|_\infty, \min_{1\le i\le n}\eta_i)$. Alors, pour t' dans $[0,1]$ tel que $|t-t'| \le \eta$, on a d'après la question précédente, $\|\Upsilon_T(t) - \Upsilon_T(t')\|_\infty \le \epsilon$ et l'application Υ_T est continue sur $[0,1]$. Puisque $[0,1]$ est connexe par arc, $\Upsilon_T([0,1])$ est aussi connexe par arc. Il est en particulier connexe. D'après la question (4)(a), pour toute matrice T dans $\mathbb{T}$, l'ensemble $\Upsilon_T([0,1])$ est inclus dans $\mathbb{T}$. Inversement, toute matrice T de $\mathbb{T}$ est dans $\Upsilon_T([0,1])$. Donc $\mathbb{T}$ est égal à $\bigcup_{T\in\mathbb{T}} \Upsilon_T([0,1])$; il est connexe comme réunion de parties connexes d'intersection non vide (l'intersection contient la matrice Id_n par la question (4)(a)).
Partie II :
Soit $E = \mathbb{C}^n$. On note les éléments de E en colonne. On munit E d'une norme quelconque $\|\cdot\|$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E. Pour f dans $\mathcal{L}(E)$, on pose $|||f||| = \sup_{x\in E,\ x\ne 0} \dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|}$.
(1) Puisque E est un espace vectoriel de dimension finie, toute application linéaire dans $\mathcal{L}(E)$ est continue. L'application $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathcal{L}(E)$ (puisque c'est une norme sur l'espace vectoriel des applications linéraires continues de E dans E d'après le cours).
On choisit A dans $M_n(\mathbb{C})$ et on définit l'application $f_A\ : E \to E$ par

$$f_A(X) = AX.$$

(2) L'application f_A est par définition une application de E dans E. Vérifions que f_A est linéaire. Soit X, Y dans E et λ, μ dans $\mathbb{C}$. Alors $f_A(\lambda X + \mu Y) = A(\lambda X + \mu Y) = \lambda AX + \mu AY = \lambda f_A(X) + \mu f_A(Y)$. D'où f_A est linéaire.

(3) Soit λ une valeur propre de f_A. Fixons X_λ un vexteur propre de A associé à la valeur propre λ. Alors, $\|f_A(X_\lambda)\| = \|AX_\lambda\| = \|\lambda X_\lambda\| = |\lambda|\|X_\lambda\|$. Puisque X_λ est non nul, on déduit que $|||f_A||| = \sup_{X\in E,\ X\neq 0} \dfrac{\|f_A(X)\|}{\|X\|} \geq \dfrac{\|f_A(X_\lambda)\|}{\|X_\lambda\|} = |\lambda|$.
(4) On suppose maintenant que $\|\cdot\|$ est la norme N_∞. On rappelle que la norme N_∞ sur E est définie par $N_\infty \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \max_{1\leq i\leq n}|x_i|$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de E. On note $a_{i,j}$ le coefficient i,j de la matrice A. On a $f_A(X) = AX = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{i,1}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{i,n}x_i \end{pmatrix}$. Donc,

$$\|f_A(X)\| = \max_{1\leq j\leq n}\left|\sum_{i=1}^n a_{i,j}x_i\right| \leq \max_{1\leq j\leq n}\left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}||x_i|\right) \leq$$
$$\sum_{i=1}^n \|A\|_\infty |x_i| = \|A\|_\infty \sum_{i=1}^n |x_i| \leq n\|A\|_\infty \|X\|.$$

Donc,

$$|||f_A||| \geq \frac{\|f_A(X)\|}{\|X\|} = n\|A\|_\infty.$$

PROBLÈME 2

(ENS Cachan 1988 — Partie I questions 1,2,3)

Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des compacts non vides de $\mathbb{C}$. Pour K dans $\mathcal{K}$ et z dans $\mathbb{C}$, on définit l'application $d_K : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+$ par $d_K(z) = d(z, K)$, c'est-à-dire que $d_K(z) = \inf_{x \in K} |z - x|$.

Partie I : Distance sur $\mathcal{K}$

(1) Soit K dans $\mathcal{K}$.

(a) Soit z dans $\mathbb{C}$. Soit x et x' dans $\mathbb{C}$. D'après l'inégalité triangulaire on a $|\,|x-z|-|x'-z|\,| \leq |x-x'|$. Donc l'application $x \mapsto |x-z|$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{C}$. Elle est donc continue sur $\mathbb{C}$. L'ensemble K est un compact non vide de $\mathbb{C}$. Donc, l'application $x \mapsto |x - z|$ est bornée sur K et y atteind ses borne. En particulier, il existe $\xi(z, K)$ dans K tel que $|z - \xi(K, z)| = \inf_{x \in K} |z - x|$; D'où le résultat.

(b) Soit z_1 et z_2 dans $\mathbb{C}$. Soit $\xi(z_1, K)$ et $\xi(z_2, K)$, comme définis dans la question (a). Puisque l'élément $\xi(z_2, K)$ est dans K, par définition de $d_K(z_1)$ on a $d_K(z_1) \leq |z_1 - \xi_K(z_2)|$. Mais on a aussi $|z_1 - \xi_K(z_2)| \leq |z_1 - z_2| + |z_2 - \xi_K(z_2)|$ d'après l'inégalité triangulaire. Par conséquent, on a $d_K(z_1) \leq |z_1 - z_2| + d_K(z_2)$. En échangeant les rôles de z_1 et z_2, on obtient $d_K(z_2) \leq |z_2 - z_1| + d_K(z_1)$ par symétrie. Ces deux inégalités donnent l'inégalité $|d_K(z_1) - d_K(z_2)| \leq |z_1 - z_2|$. On en déduit que l'application d_K est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{C}$ et qu'elle est donc aussi continue sur $\mathbb{C}$.

(c) Soit z de $\mathbb{C}$. D'après l'inégalité triangulaire, pour tout x dans K, on a $|z - x| \leq |z - \xi(z, K)| + |\xi(z, K) - x| = d_K(z) + |\xi(z, K) - x|$. Mais K est compact. Il est donc borné et il existe $M(K) > 0$ tel que pour tout x, y dans K, on a $|y - x| \leq M(K)$. Comme $\xi(z, K)$ est dans K, on a pour tout x de K, $|z - x| \leq M(K) + d_K(z)$.

(2) Soit K_1 et K_2 dans $\mathcal{K}$.

(a) Par hypothèse, K_1 et K_2 sont compacts. Ceci implique que $K_1 \cup K_2$ est aussi compact (réunion finie de compacts). Il existe ainsi une constante $M(K_1, K_2)$ telle que pour tout x, y dans $K_1 \cup K_2$, on a $|y - x| \leq M(K_1, K_2)$. Soit maintenant z dans $\mathbb{C}$. D'après la question (1)(a), il existe $\xi(z, K_1)$ dans K_1 et $\xi(z, K_2)$ dans K_2 tels que $d_{K_1}(z) = |z - \xi(z, K_1)|$ et $d_{K_2}(z) = |z - \xi(z, K_2)|$. On a alors $|d_{K_1}(z) - d_{K_2}(z)| = ||z - \xi(z, K_1)| - |z - \xi(z, K_2)||$. Mais par l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$,

$$||z - \xi(z, K_1)| - |z - \xi(z, K_2)|| \leq |\xi(z, K_1) - \xi(z, K_2)| \leq M(K_1, K_2).$$

D'où l'inégalité voulue. On a montrer qu'il existe une constante $M(K_1, K_2)$ telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \ |d_{K_1}(z) - d_{K_2}(z)| \leq M(K_1, K_2).$$

(b) Supposons $K_1 \subseteq K_2$. Pour tout z de $\mathbb{C}$, on a $\inf_{x \in K_1} |z - x| \geq \inf_{x \in K_2} |z - x|$ et $d_{K_1}(z) \geq d_{K_2}(z)$.

Inversement supposons que pour tout z de $\mathbb{C}$, on a $d_{K_1}(z) \geq d_{K_2}(z)$. Soit z dans K_1 quelconque fixé. On a $0 \leq d_{K_2}(z) \leq d_{K_1}(z) \leq |z - z| = 0$. Ceci implique que $|z - \xi(z, K_2)| = 0$ et que $z = \xi(z, K_2)$; en particulier z est dans K_2. Puisque ceci est vrai pour tout z dans K_1, ce dernier est inclus dans K_2.

(3) Pour K_1 et K_2 dans $\mathcal{K}$, on pose $\delta(K_1, K_2) = \|d_{K_1} - d_{K_2}\|_\infty$. Montrons que δ est une distance sur $\mathcal{K}$.

D'après la question (2)(a), pour K_1 et K_2 dans $\mathcal{K}$, l'application $d_{K_1} - d_{K_2}$ est majorée et $\delta(K_1, K_2)$ est définie. Par construction, pour K_1 et K_2 dans $\mathcal{K}$, $\delta(K_1, K_2)$ est dans $[0, +\infty[$. De plus $\delta(K_1, K_2) = \delta(K_2, K_1)$. De plus, si K_3 est aussi dans $\mathcal{K}$, alors $\delta(K_1, K_2) = \|d_{K_1} - d_{K_2}\|_\infty \le \|d_{K_1} - d_{K_3}\|_\infty + \|d_{K_3} - d_{K_2}\|_\infty = \delta(K_1, K_3) + \delta(K_3, K_2)$. Enfin,

$$\delta(K_1, K_2) = 0 \iff \|d_{K_1} - d_{K_2}\|_\infty = 0 \iff \forall z \in \mathbb{C}, d_{K_1}(z) = d_{K_2}(z)$$

ce qui est équivalent (par bi-inclusion et la question 2(c)) à $K_1 = K_2$. Donc δ vérifie les propriétés définissant une distance : δ est une distance sur $\mathcal{K}$.

Partie II : Complétude

Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathcal{K}$ pour la distance δ.

(1) Soit N dans $\mathbb{N}$ tel que pour tous $n, m \ge N$, $\delta(K_n, K_m) \le 1$.

Soit x dans K_N. Pour tout z dans $\mathbb{C}$, on a $|z-x| \le |z-\xi(K_N, z)|+|\xi(K_N, z)-x|$. Par définition, $\xi(K_N, z)$ est dans K_N, donc $|\xi(K_N, z) - x| \le M(K_N)$, avec $M(K_N)$ défini comme dans la question I(1)(c). De plus, $|z-\xi(K_N, z)| = d_{K_N}(z)$. En particulier, si z est dans K_n, pour un $n \ge N$, on a $|z-\xi(K_N, z)| = d_{K_N}(z) - d_{K_n}(z) \le \|d_{K_N} - d_{K_n}\|_\infty = \delta(K_N, K_n) = 1$. Donc, il existe $M(K_N) > 0$ tel que pour tout $n \ge N$ et tout z dans K_n, on a $|z - x| \le 1 + M_{K_N}$.

L'ensemble $\cup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est borné si il existe une constante M telle que pour tout z dans $\cup_{n\in\mathbb{N}} K_n$, on a $|z - x| \le M$. Soit

$$M = \max(1 + K_N, \max_{0\le n\le N-1} M(K_n, K_N))$$

où $M(K_n, K_N)$ est défini dans la question 2(a). Soit z dans $\cup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Si z est dans K_n avec $n \le N - 1$, alors $|z - x| \le M(K_n, K_N) \le M$. Si z est dans K_n avec $n \ge N$ alors $|z - x| \le M(K_N) + 1 \le M$. Donc, $\cup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est borné. Soit $K_\infty = \overline{\cup_{n\in\mathbb{N}} K_n}$. Par définition, K_∞ est fermé. De plus il est borné puisque $\cup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ l'est. K_∞ est donc fermé et borné dans $\mathbb{C}$ qui est de dimension finie. Il est donc compact.

(2) Par hypothèse, la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Donc pour tout $\epsilon > 0$ il existe n_0 tel que pour tous entiers $n, m \ge n_0$, $\|d_{K_n} - d_{K_m}\|_\infty \le \epsilon$. Donc la suite de fonctions continues $(d_{K_n})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur l'espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{C}$. Par conséquence, elle converge uniformement sur $\mathbb{C}$ vers une fonction continue $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$.

On pose $K = \{z \in \mathbb{C} \mid \varphi(z) = 0\}$.

(3) (a) K est l'image réciproque par l'application continue φ du fermé $\{0\}$ de $\mathbb{R}$. Donc, K est fermé.

(b) Pour tout entier positif n on choisit x_n dans K_n. Puisque la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, le sous-ensemble K_∞ est compact. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de K_∞. Donc, elle possède une sous-suite $(x_{\theta(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans K_∞ vers un élément x. Cet élément est dans K si et seulement si $\varphi(x) = 0$. Puisque la suite $(d_{K_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ sur $\mathbb{C}$, la suite $(d_{K_{\theta(n)}}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\varphi(x)$. Mais, pour tout n, on a $d_{K_{\theta(n)}}(x) \le |x_{\theta(n)} - x|$ car $x_{\theta(n)}$ est dans $K_{\theta(n)}$. Puisque la suite $(x_{\theta(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x, on a $\lim_{n\to+\infty} |x_{\theta(n)} - x| = 0$; donc la limite en $+\infty$ de la suite $(d_{K_{\theta(n)}}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est 0. De l'unicité de la limite, il découle $\varphi(x) = 0$ et x est dans K.

(c) Soit x dans $\mathbb{C}$. Supposons que x est dans K. Posons $x_n = \xi(K_n, x)$. Alors, pour tout entier n l'élément x_n est dans K_n et $|x_n - x| = d_{K_n}(x)$. Puisque la suite $(d_{K_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{C}$ vers φ, la suite $(d_{K_n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\varphi(x)$. Mais x est dans K donc $\varphi(x) = 0$ et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

vers x (dans ce cas, $\psi(n) = n$).
Réciproquement, supposons qu'il existe une application strictement croissante $\psi\ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}$ qui converge vers x avec $x_n \in K_{\psi(n)}$ pour tout entier n. Comme dans la question (b), on a $0 \leq d_{K_{\psi(n)}(x)} \leq |x_{\psi(n)} - x|$ et $\lim_{n\to+\infty} d_{K_{\psi(n)}(x)} = \varphi(x)$. Puisque par hypoth'ese, $\lim_{n\to+\infty} |x_{\psi(n)} - x| = 0$, on a $\varphi(x) = 0$ et x est dans K.
(d) Soit z de K. D'après la question précédente, il existe une application strictement croissante $\psi\ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}$ qui converge vers z avec $z_n \in K_{\psi(n)}$ pour tout entier n. Puisque l'application d_{K_∞} est continue, la suite $(d_{K_\infty}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $d_{K_\infty}(z)$. Mais pour tout entier n, on a $d_{K_\infty}(z_n) = 0$, car z_n est dans $K_{\psi(n)}$ et $K_{\psi(n)}$ est inclus dans K_∞. Donc $d_{K_\infty}(z) = 0$ et z est dans K_∞. On en déduit que K est fermé et inclus dans K_∞ qui est compact. Donc K est compact. De plus, la question (b) montre en particulier K est non vide. Puisque K est un compact non vide de $\mathbb{C}$, il est dans $\mathcal{K}$.
(4) Soit z dans $\mathbb{C}$.
(a) D'après la question (3)(c), il existe une application strictement croissante $\psi\ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}$ qui converge vers $\xi(z, K)$ avec $x_n \in K_{\psi(n)}$ pour tout entier n. Pour tout n, l'élément $x_{\psi(n)}$ est dans $K_{\psi(n)}$ et on a $|z - x_{\psi(n)}| \geq d_{K_{\psi(n)}}(z)$. Mais $d_K(z) = |z - \xi(z, K)| = \lim_{n\to+\infty} |z - x_{\psi(n)}|$ (par continuité de l'appication $t \mapsto |z - t|$) et $\lim_{n\to+\infty} d_{K_{\psi(n)}}(z) = \varphi(z)$ (puisque la suite $(d_{K_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ). Par passage à la limite dans l'inégalité, on obtient $d_K(z) \geq \varphi(z)$.
(b) Posons $x_n = \xi(z, K_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. D'après la question (2)(b), il existe $\theta\ :\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\theta(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément x de K. L'application $t \to |z - t|$ est continue, donc la suite $(|z - x_{\theta(n)}|)_{n\ in\mathbb{N}}$ converge vers $|z - x|$. Puisque x est dans K, on a $d_K(z) \leq |z - x|$. Mais pour tout n, on a $|z - x_{\theta(n)}| = d_{K_{\psi(n)}}(z)$ et la suite $(d_{K_n})_{n\in\mathbb{N}}(z)$ converge vers $\varphi(z)$ (voir les questions précédentes). Donc par unicité de la limite, $\varphi(z) = |z - x|$ et $d_K(z) \leq \varphi(z)$.
(5) Dans la question (3), on a vu que K est dans $\mathcal{K}$. Or la question (4) montre que l'on a $\varphi = d_K$. En particulier, la suite $(d_{K_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers d_K sur $\mathbb{C}$. En d'autres termes $\lim_{n\to+\infty} \delta(K_n, K) = 0$ et la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers K dans $\mathcal{K}$. Puisque la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy quelconque de $\mathcal{K}$, les questions précédentes montrent que toute suite de Cauchy de $\mathcal{K}$ converge dans $\mathcal{K}$. Donc $\mathcal{K}$ est complet.