

Licence de Mathématiques — Espaces métriques (EM 51)
Examen de janvier 2007 (3 heures)

Chaque candidat doit en début d'épreuve porter son nom dans le coin de la copie, qu'il cachera par collage après signature de la feuille d'émargement. Il devra en outre porter son numéro sur chacun des intercalaires.

Tous les documents (dont calculatrice et téléphone portable) sont interdits.

QUESTIONS DE COURS

1. Rappeler la définition d'un sous-ensemble connexe. Donner sans justification un exemple d'une partie connexe qui n'est pas connexe par arcs.
2. Soit (E, d) un espace métrique et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E . Montrer que si la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une sous-suite qui converge, alors elle converge.

PROBLÈME 1

On fixe n dans \mathbb{N}^* . On munit \mathbb{C} de sa norme usuelle. On munit $M_n(\mathbb{C})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|$$

si les $a_{i,j}$ sont les coefficients de la matrice A (on admettra que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme).

Partie I :

On rappelle que l'application $t \mapsto e^{it}$ est continue de \mathbb{R} dans \mathbb{C} .

1. Soit z dans \mathbb{C} non nul. Soit θ dans $[0, 2\pi[$ et r le réel strictement positif tel que $z = re^{i\theta}$. Soit $\varphi_z : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\varphi_z(t) = (1 + t(r - 1))e^{it\theta}$.
 - (a) Calculer $\varphi_z(0)$ et $\varphi_z(1)$.
 - (b) Montrer que $\varphi_z([0, 1])$ est connexe par arcs ; montrer que $\varphi_z([0, 1])$ est inclus dans \mathbb{C}^* .
 - (c) Montrer que l'ensemble

$$\bigcup_{z \in \mathbb{C}^*} \varphi_z([0, 1])$$

est connexe par arcs. En déduire que \mathbb{C}^* est connexe.

2. Justifier que $M_n(\mathbb{C})$ est connexe et complet. $M_n(\mathbb{C})$ est-il compact pour $\|\cdot\|_\infty$?
3. Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est ouvert dans $M_n(\mathbb{C})$. Le sous-ensemble $GL_n(\mathbb{C})$ est-il complet, compact dans $M_n(\mathbb{C})$?

4. Soit \mathbb{T} l'ensemble des matrices triangulaires supérieures dans $GL_n(\mathbb{C})$.
Soit

$$T = \begin{pmatrix} z_1 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & z_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & z_n \end{pmatrix}$$

dans \mathbb{T} , et $\Upsilon_T(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{z_1}(t) & ta_{1,2} & \cdots & ta_{1,n} \\ 0 & \varphi_{z_2}(t) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & ta_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & \varphi_{z_n}(t) \end{pmatrix}$ pour t dans $[0, 1]$.

- (a) Calculer $\Upsilon_T(0)$ et $\Upsilon_T(1)$, puis montrer que pour tout t dans $[0, 1]$, la matrice $\Upsilon_T(t)$ est dans \mathbb{T} .
(b) Montrer que si t et t' sont dans $[0, 1]$, alors

$$\|\Upsilon_T(t) - \Upsilon_T(t')\|_\infty \leq |t - t'| \|T\|_\infty + \max_{1 \leq i \leq n} |\varphi_{z_i}(t) - \varphi_{z_i}(t')|.$$

- (c) Montrer que \mathbb{T} est connexe.

Partie II :

Soit $E = \mathbb{C}^n$, muni d'une norme quelconque $\|\cdot\|$. On note les éléments de E en colonne.
On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E . Pour f dans $\mathcal{L}(E)$, on pose

$$\|f\| = \sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}.$$

On fixe A dans $M_n(\mathbb{C})$ et on définit l'application $f_A : E \rightarrow E$ par $f_A(X) = AX$.

1. Montrer que f_A est dans $\mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que si λ est une valeur propre de f_A alors $\|f_A\| \geq |\lambda|$.
3. On suppose maintenant que $\|\cdot\|$ est la norme N_∞ . On rappelle que la norme N_∞ sur E est définie par $N_\infty \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$. Montrer que $\|f_A\| \leq n \|A\|_\infty$.

PROBLÈME 2

(ENS Cachan 1988 — Partie I questions 1,2,3)

Soit \mathcal{K} l'ensemble des compacts non vides de \mathbb{C} . Pour K dans \mathcal{K} et z dans \mathbb{C} , on définit l'application $d_K : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^+$ par $d_K(z) = d(z, K)$, c'est-à-dire que $d_K(z) = \inf_{x \in K} |z - x|$. Toutes les questions peuvent être traitées en admettant les questions précédentes.

Partie I : Distance sur \mathcal{K}

1. Soit K dans \mathcal{K} .
 - (a) Soit z dans \mathbb{C} . Montrer que l'application $x \mapsto d(x, z)$ est continue, puis montrer qu'il existe $\xi(z, K)$ dans K tel que

$$d_K(z) = |z - \xi(K, z)|.$$

- (b) Soit z_1 et z_2 dans \mathbb{C} . En utilisant (a), montrer que $d_K(z_1) \leq |z_1 - z_2| + d_K(z_2)$. En déduire que l'application d_K est continue sur \mathbb{C} .
- (c) En utilisant (a), montrer qu'il existe $M(K) > 0$ tel que pour tout z de \mathbb{C} et tout x dans K , on a : $|z - x| \leq M(K) + d_K(z)$.

2. Soit K_1 et K_2 dans \mathcal{K} .
 - (a) En utilisant la question 1.(a), montrer qu'il existe une constante $M(K_1, K_2)$ telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, |d_{K_1}(z) - d_{K_2}(z)| \leq M(K_1, K_2).$$

- (b) Montrer que : $K_1 \subseteq K_2 \iff \forall z \in \mathbb{C}, d_{K_1}(z) \geq d_{K_2}(z)$.
3. Pour K_1 et K_2 dans \mathcal{K} , on pose $\delta(K_1, K_2) = \|d_{K_1} - d_{K_2}\|_\infty$. On notera que d'après la question 2.(a), cela a bien un sens. Montrer que δ est une distance sur \mathcal{K} .

Partie II : Complétude

Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de \mathcal{K} pour la distance δ .

1. Soit N dans \mathbb{N} tel que pour tous $n, m \geq N$, $\delta(K_n, K_m) \leq 1$. Soit x dans K_N . En utilisant la question I 1.(c), montrer qu'il existe une constante $M(K_N)$ telle que pour tout $n \geq N$ et tout z dans K_n , on a

$$|z - x| \leq 1 + M(K_N).$$

En déduire que $\cup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ est borné, puis que $\overline{\cup_{n \in \mathbb{N}} K_n}$ est compact dans \mathbb{C} . On note dans la suite $K_\infty = \overline{\cup_{n \in \mathbb{N}} K_n}$.

2. En utilisant un résultat du cours, que l'on nommera, montrer que la suite de fonctions $(d_{K_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur \mathbb{C} vers une fonction continue $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$. On pose $K = \{z \in \mathbb{C} \mid \varphi(z) = 0\}$.

3. (a) Montrer que K est fermé.
 (b) Pour tout entier positif n on choisit x_n dans K_n . En utilisant que la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un élément x_∞ de K_∞ . Montrer que x_∞ est dans K .
 (c) Soit x dans \mathbb{C} . Montrer que x est dans K si et seulement s'il existe une application strictement croissante $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{C} qui converge vers x avec $x_n \in K_{\psi(n)}$ pour tout entier n .
 (d) Dédire de ce qui précède que pour tout z de K , on a $d_{K_\infty}(z) = 0$, puis que K est dans \mathcal{K} .
4. Soit z dans \mathbb{C} .
 (a) En utilisant la question 3.(c) et l'élément $\xi(z, K)$ de K , défini dans la question I 1.(a), montrer que l'on a $\varphi(z) \leq d_K(z)$ pour tout z de \mathbb{C} .
 (b) Montrer que l'on a $\varphi(z) \geq d_K(z)$.
 (On pourra pour cela utiliser la suite $(\xi(z, K_n))_{n \in \mathbb{N}}$).
5. Montrer que \mathcal{K} est complet pour la distance δ .