Université de Caen
U.F.R. Sciences

Année universitaire 2006-2007

Licence 3 Mathématiques

Devoir n˚2 : corrigé

Exercice I

1. Par hypothèse tous les K_n sont compacts, donc fermés ; leur intersection $\cap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est *a fortiori* fermé.

2. L'ensemble $\cap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est compact car intersection de compacts.

3. (a) Comme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a en particulier $\varphi(n) \geq n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (K_n) étant décroissante, on en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{\varphi(n)} \in K_{\varphi(n)} \subseteq K_n.$$

tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_{\varphi(n)} \in K_n$.

   (b) On sait déjà que $\cap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est compact, il reste donc à montrer qu'il est non vide. Comme (u_n) est une suite d'élément du compact K_0, on peut en extraire une sous-suite convergente $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, notons $l \in K_0$ sa limite. Montrons que l est dans l'intersection $\cap_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$; la suite (K_n) étant décroissante, on déduit de 2., pour tout $n \geq n_0$, l'inclusion $u_{\varphi(n)} \in K_{n_0}$. Il vient, du caractère fermé de K_{n_0}, que l appartient à K_{n_0}.

Exercice II

Le but de cet exercice est de généraliser la propriété suivante :

> *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable de dérivée nulle sur tout U, alors f est constante sur tout intervalle I inclus dans U.*

C'est le cas par exemple de la fonction partie entière sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Nous allons pour cela naturellement utiliser un argument de connexité.

1. Par la formule de dérivation composée on obtient, pour tout $t \in [0,1]$:

$$\varphi'(t) = (a'-a)\frac{\partial f}{\partial x}\Big((1-t)a+ta', (1-t)b+tb'\Big) + (b-b')\frac{\partial f}{\partial y}\Big((1-t)a+ta', (1-t)b+tb'\Big).$$

   Les boules d'un espace vectoriel normé étant convexes, pour tout t dans $[0,1]$ l'élément $(1-t)(a,b)+t(a',b')$ est dans $B\big((a,b),r\big)$. L'application φ a ainsi une dérivée nulle sur l'intervalle $[0,1]$, elle y est donc constante ; *a fortiori* f est constante sur $B\big((a,b),r\big)$.

2. Notons A l'ensemble $\{(a,b) \in U \mid f(a,b) = f(u,v)\}$. Celui-ci étant l'image réciproque du fermé $\{f(u,v)\}$ par l'application continue f intersectée avec U, c'est un fermé de U. Montrons que A est ouvert ; soit $(a,b) \in U$ et soit $r > 0$ tel que $B\big((a,b),r\big) \subseteq U$. D'après la question précédente f est constante sur cette boule ouverte, cette dernière est donc incluse dans A.

3. L'ensemble A contient (u,v), il est en particulier non vide ; par connexité de U on déduit de la question précédente l'égalité $A = U$, autrement dit f est constante sur U.

4. Il suffit ici de raisonner comme dans les questions précédentes, en travaillant sur chaque composante connexe U de V. En effet si la différentielle de g est nulle sur V, il en est de même de toutes ses dérivées partielles.

Exercice III

1. L'application de K dans $\mathbb{R}_+$ définie par

$$x \mapsto d(x, f(x))$$

   étant continue et K compact, elle atteint sa borne inférieure en un point x_0.

2. Si $d(x_0, f(x_0)) \neq 0$, autrement dit si $f(x_0) \neq x_0$, alors on par définition de f on a :

$$d(f(x_0), d(f(f(x_0))) < d(x_0, f(x_0)) \ ,$$

   ce qui contredit la minimalité de $d(x_0, f(x_0))$. Donc x_0 est un point fixe de f. Pour montrer l'unicité il suffit de remarquer que si x_1 est un autre fixe de f on a de même :

$$d(x_0, x_1) = d(f(x_0), d(f(x_1)) < d(x_0, x_1) \ ,$$

   ce qui est impossible.

Exercice IV

1. L'ensemble F étant fermé, tout x dans son complémentaire U vérifie $d(x,F) > 0$, l'application d' est donc bien définie. Les quatre assertions définissant une distance (positivité, symétrie, nullité uniquement pour deux éléments égaux et inégalité triangulaire) sont immédiates.

2. Pour tout $(x,y) \in U^2$ nous avons $d'(x,y) \geq d(x,y)$, ceci étant il n'est pas ici possible de majorer d' en fonction (linéairement) de d. Il suffit pour cela de considérer la suite $\left((0, 1-\frac{1}{n})\right) \in U^{\mathbb{N}^*}$; pour tout $n > 0$ on a en effet :
$$d'\left((0,0),(0,1-\frac{1}{n})\right) = 1 - \frac{1}{n} + \left|\frac{1}{1} - \frac{1}{1/n}\right| = n - \frac{1}{n} \geq n \cdot d\left((0,0),(0,1-\frac{1}{n})\right)$$

3. Soient $\alpha > 0$ et $x, y \in U_\alpha$. Sans perte de généralité on peut supposer $d(y,F) \geq d(x,F)$; on a alors :
$$\begin{aligned} d(x,y) \quad \leq \quad d'(x,y) \quad &= \quad d(x,y) + \left|\frac{d(y,F) - d(x,F)}{d(x,F) \cdot d(y,F)}\right| \\ &\leq \quad d(x,y) + \frac{d(y,F) - d(x,F)}{\alpha^2} \\ &\leq \quad \left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right) \cdot d(x,y). \end{aligned}$$
Les restrictions de d et d' à U_α sont donc équivalentes.

4. (a) Soit x' la limite de $(x_n)_{n\geq 0}$ dans (U,d'). Pour tout n on a $d(x,x_n) \leq d'(x,x_n)$, donc (x_n) converge vers x' dans (U,d).
   (b) Soit x la limite de $(x_n)_{n\geq 0}$ dans (U,d) et posons $\alpha := \frac{d(x,F)}{2} > 0$. Comme U_α est un voisinage de x et (x_n) converge vers x dans (U,d), il existe un entier N_α tels que, pour tout $n \geq N_\alpha$, on ait $x_n \in U_\alpha$.
   D'après 3., les restrictions de d et d' à U_α sont équivalentes, elles définissent en particulier sur U_α les mêmes suites convergentes, donc la suite $(x_n)_{n\geq N_\alpha}$ converge vers x dans (U_α, d'), *a fortiori* la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x dans (U,d').

5. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy de (U,d'). Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall p \geq N,\ d'(x_N, x_p) = d(x_N, x_p) + \left|\frac{1}{d(x_N,F)} - \frac{1}{d(x_p,F)}\right| < 1$$
En particulier la suite $\left(\frac{1}{d(x_p,F)}\right)_{n\geq 0}$ est majorée par un certain réel $M > 0$. Pour tout p on a donc $x_p \in U_{1/M}$.
Comme F est le complémenaire de U on a :
$$U_{1/M} = \left\{x \in U \mid d(x,F) \geq \frac{1}{M}\right\} = \left\{x \in E \mid d(x,F) \geq \frac{1}{M}\right\}\ ,$$
c'est ainsi un fermé de (E,d), qui est complet, donc $(U_{1/M}, d)$ est également complet. De plus pour tous $n, p \in \mathbb{N}$ on a $d(x_n,x_p) \leq d'(x_n,x_p)$, en particulier $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans (U,d), donc convergente dans (U,d). D'après la question précédente $(x_n)_{n\geq 0}$ converge dans (U,d').