Université de Caen
U.F.R. Sciences

Année universitaire 2006-2007

Licence 3 Mathématiques
Devoir n ° 2

Exercice I

Soit (E, d) un espace métrique. On considère une suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante de compacts non vides de E, c'est-à-dire vérifiant, pour tout n entier naturel : $K_{n+1} \subseteq K_n$.

1. Montrer que $\cap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est fermé.
2. Montrer que $\cap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est compact.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_n \in K_n$.
   (a) Montrer que si $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{\varphi(n)} \in K_n$.
   (b) En déduire que $\cap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est un compact non vide de E.

Exercice II

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$, muni de la distance euclidienne et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose les dérivées partielles de f sont nulles sur U c'est-à-dire :

$$\forall (u, v) \in U, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial y}(u, v) = 0.$$

1. Soient $(a, b) \in U$ et $r > 0$ tel que $B\big((a, b), r\big) \subseteq U$. Soit $(a', b') \in B\big((a, b), r\big)$, on considère l'application de $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par
$$t \mapsto f\Big((1-t)a + ta', (1-t)b + tb'\Big).$$
Calculer la dérivée de cette fonction. En déduire que f est constante sur $B\big((a, b), r\big)$.
2. Soit $(u, v) \in U$, montrer que l'ensemble des points $(a, b) \in U$ tels que $f(u, v) = f(a, b)$ est ouvert et fermé dans U.
3. Montrer que f est constante sur U.
4. Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $g : V \to \mathbb{R}$ dont la différentielle est nulle en tout point de V. Montrer que f est constante sur chaque composanter connexe de V.

Exercice III

Soit (K, d) un espace métrique compact. On considère une application $f : K \to K$ vérifiant :

$$\forall x, y \in K, x \neq y, \quad d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in K$ tel que $d\big(x_0, f(x_0)\big) = \inf_{x \in K} d\big(x, f(x)\big)$.
2. En déduire que f admet un unique point fixe.

Exercice IV

Soit (E, d) un espace métrique. Soit U un ouvert de E, avec $U \neq \emptyset$ et $U \neq E$, et F son complémentaire. Pour tout $x, y \in U$ on définit :

$$d'(x, y) = d(x, y) + \left| \frac{1}{d(x, F)} - \frac{1}{d(y, F)} \right|.$$

1. Montrer que d' est une distance sur U.
2. Considérons **pour cette question uniquement** le cas où $E = \mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne et U est la boule unité ouverte. Montrer que d' et la restriction de d à U ne sont ici pas équivalentes.
3. Montrer que pour tout $\alpha > 0$, les restrictions de d et d' à $U_\alpha := \{x \in U \mid d(x, F) \geq \alpha\}$ sont des distances équivalentes.
4. Nous allons voir que les restrictions de d et d' à U sont topologiquement équivalentes (*i.e.* définissent les mêmes suites convergentes). Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de U.
   (a) Montrer que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans (U, d'), alors elle converge dans (U, d).
   (b) On suppose maintenant que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans (U, d).
   Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et un entier N_α tels que, pour tout $n \geq N_\alpha$, on ait $x_n \in U_\alpha$.
   En déduire que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans (U, d')
5. Montrer que si (E, d) est complet, alors il en est de même de (U, d') (on pourra montrer que toute suite de Cauchy pour d' dans U est contenue dans un U_α, pour un $\alpha > 0$ convenable).