Université de Caen **2006-2007**
UFR de Sciences

Licence de Sciences et Technologie
Année L3 - Parcours "Mathématiques"
Espace métrique - devoir 1 (corrigé)

Exercice 1: Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et U une partie ouverte de E. A-t-on $\overset{\circ}{\overline{U}} = U$ en général ?

La réponse est non. Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, pour $U =]-1,0[\cup]0,1[$ (qui est ouvert), on a $\overline{U} = [-1,1]$ et $\overset{\circ}{\overline{U}} =]-1,1[$, qui est différent de U. Notons que l'on a toujours $U \subseteq \overset{\circ}{\overline{U}}$ puisque U est un ouvert inclus dans $\overline{U}$.

Exercice 2: Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.
(1) Soit a dans E et λ, r dans $\mathbb{R}$ strictement positifs. Montrer que $\lambda \cdot B(a,r) = B(\lambda a, \lambda r)$.
On a $\lambda \cdot B(a,r) = \{\lambda x \mid x \in B(a,r)\}$ par définition. Soit x dans $B(a,r)$. Alors, $\|\lambda x - \lambda a\| = \|\lambda(x-a)\| \leq \lambda\|x-a\| < \lambda r$. Donc $\lambda \cdot B(a,r)$ est inclus dans $B(\lambda a, \lambda r)$. Soit y dans $B(\lambda a, \lambda r)$. Alors,

$$\|\frac{1}{\lambda}y - a\| = \|\frac{1}{\lambda}(y - \lambda a)\| = \frac{1}{\lambda}\|y - a\| < \frac{1}{\lambda}\lambda r = r.$$

Donc $\frac{1}{\lambda}y$ est dans $B(a,r)$. Comme $y = \lambda(\frac{1}{\lambda}y)$, l'élément y est dans $\lambda \cdot B(a,r)$ et la boule $B(\lambda a, \lambda r)$ est incluse dans $\lambda \cdot B(a,r)$. D'où l'égalité par bi-inclusion.
(2) Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que si F est distinct de E, alors $\overset{\circ}{F} = \emptyset$.
Supposons que $\overset{\circ}{F}$ est non vide. Alors il existe x_0 dans F et $r_0 > 0$ tel que $B(x, r_0)$ est incluse dans F. Puisque F est un sous-espace vectoriel, alors L'ensemble $\{y - x \mid y \in B(x, r_0)\}$ est inclus dans F. Mais, il est immédiat que $\{y - x \mid y \in B(x,r)\}$ est égal à $B(0, r_0)$. Donc, $B(0, r_0)$ est incluse dans F. D'après la première question, on en déduit que pour tout $r > 0$, la boule $B(O, r)$ est incluse dans F. Mais, tout x de F est inclus dans $B(0, \|x\|+1)$. D'où E est inclus dans F, et par conséquent, $E = F$.
(3) Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\overline{F}$ est aussi un sous-espace vectoriel de E.
Soit x et y dans $\overline{F}$ et λ, μ dans $\mathbb{R}$. Alors, il existe deux suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ de F qui convergent respectivement vers x et y. Puisque F est un sous-espace vectoriel, pour tout entier n le vecteur $\lambda x_n + \mu y_n$ est dans F. Mais la suite $(\lambda x_n + \mu y_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\lambda x + \mu y$ puisque

$$\|(\lambda x + \mu y) - (\lambda x_n + \mu y_n)\| \leq |\lambda|\|x - x_n\| + |\mu|\|y - y_n\|.$$

Donc $\lambda x + \mu y$ est dans $\overline{F}$. D'après la caractérisation des sous-espace vectoriel, $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.
Remarque, lorsque F est de dimension finie, alors nécessairement, $\overline{F} = F$,

mais cela n'est pas vrai en général.

Exercice 3: On considère $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne $\| \cdot \|_2$. On pose $E^\star = E - \{(0,0)\}$. On définie sur $E^\star \times E^\star$ l'application Δ par

$$\Delta(X,Y) = | \ \|X\|_2 - \|Y\|_2 \ | + \frac{\| \ \|X\|_2 \cdot Y - \|Y\|_2 \cdot X \ \|_2}{\|X\|_2 \|Y\|_2}$$

pour X, Y dans $E^\star$.

(1)Montrer que Δ est une distance sur $E^\star$.

Il est clair que $\Delta(X,Y)$ est dans $\mathbb{R}^+$ pour tout X, Y de $E^\star$, et que $\Delta(X,X) = 0$, puisque $\|(0,0)\|_2 = 0$. Si $\Delta(X,Y) = 0$ alors

$$| \ \|X\|_2 - \|Y\|_2 \ | = \| \ \|X\|_2 \cdot Y - \|Y\|_2 \cdot X \ \|_2 = 0$$

puisque ces deux termes sont positifs. Ceci implique que $\|X\|_2 = \|Y\|_2$ et que $\|X\|_2 \cdot Y = \|Y\|_2 \cdot X$. Puisque X est différent de $(0,0)$ et que $\| \cdot \|_2$ est une norme, $\|X\|_2$ est non nul et $X = Y$. Maintenant, on remarque que

$$\Delta(X,Y) = | \ \|X\|_2 - \|Y\|_2 \ | + \left\| \frac{Y}{\|Y\|_2} - \frac{X}{\|X\|_2} \right\|_2$$

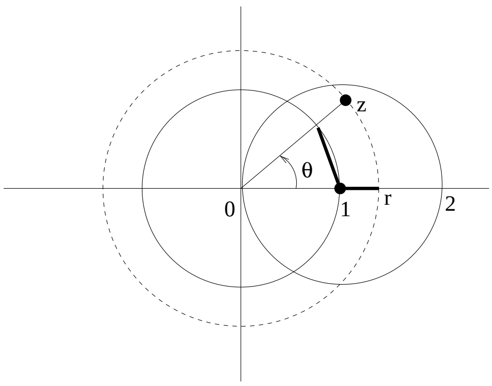
Il est alors clair que $\Delta(Y,X) = \Delta(X,Y)$. De plus pour tous x, y, z de $\mathbb{R}$ on a $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$, et pour tout X_0, Y_0, Z_0 de E on a $\|X_0 - Y_0\|_2 \leq \|X_0 - Z_0\|_2 + \|Z_0 - Y_0\|_2$. On en déduit que pour tout X, Y, Z de $E^\star$, on a $\Delta(X,Y) \leq \Delta(X,Z) + \Delta(Z,Y)$. Donc Δ est une distance sur $E^\star$.

(2)Existe-t-il sur E une norme telle que Δ est une distance induite par la distance associée à cette norme.

La réponse est non. Par exemple, par ce que $\Delta((\frac{1}{2},0),(-\frac{1}{2},0)) = 2$ et non pas $1 = \frac{1}{2}\Delta((1,0),(-1,0))$.

(3) Dessiner $\overline{B}((1,0),1)$ pour la distance Δ. La boule $\overline{B}((1,0),1)$ est l'ensemble des (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $\Delta((x,y),(1,0)) \leq 1$. En passant en coordonnées polaires, on voit que la boule $\overline{B}((1,0),1)$ est l'ensemble des points de coordonnées polaires (r,θ) tels que $|r-1| + |2\sin(\frac{\theta}{2})| \leq 1$. Ce qui veut dire que c'est la partie finie de $\mathbb{R}^2$ définie par les deux courbes $r = 2\sin(\frac{\theta}{2})$ avec θ dans $[\frac{-\pi}{3}, \frac{-\pi}{3}]$ et $r = 2(1-\sin(\frac{\theta}{2}))$ avec θ dans $[\frac{-\pi}{3}, \frac{-\pi}{3}]$. C'est alors un petit

exercice sur les courbes paramétrées en coordonnées polaires.

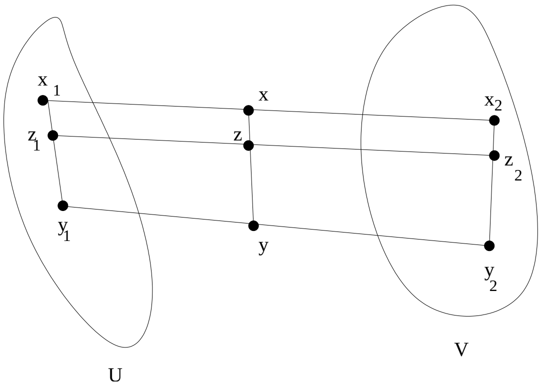


Exercice 4: Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit U et V deux ouverts convexes non vides de E. Montrer que le sous-ensemble

$$\{z \in E \mid \exists x \in U,\ \exists y \in V,\ \exists t \in [0,1]\ /\ z = tx + (1-t)y\}$$

est convexe et ouvert dans E.

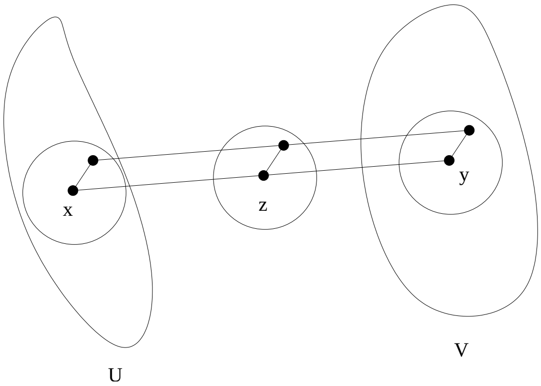
Notons $C(U,V)$ l'ensemble $\{z \in E \mid \exists x \in U,\ \exists y \in V,\ \exists t \in [0,1]\ /\ z = tx + (1-t)y\}$. Commençons par montrer que $C(U,V)$. Soit x, y dans $C(U,V)$ et λ dans $[0,1]$. Posons $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. Puisque x et y sont dans $C(U,V)$, il existe x_1, y_1 dans U, il existe x_2, y_2 dans V et il existe t, r dans $[0,1]$ tels que $x = tx_1 + (1-t)x_2$ et $y = ry_1 + (1-r)y_2$.



On obtient alors $z = \lambda(tx_1 + (1-t)x_2) + (1-\lambda)(ry_1 + (1-r)y_2)$. Si $t = r = 0$, alors x et y sont dans U qui est convexe ; donc z est dans U, qui est inclus dans $C(U,V)$. De même, si $t = r = 1$, alors x et y sont dans V qui est convexe ; donc z est dans V, qui est inclus dans $C(U,V)$. Si (t,r) est différent de $(0,0)$ et de $(1,1)$, alors on trouve

$$z = (\lambda t + (1-\lambda)r)\left(\frac{\lambda t}{\lambda t + (1-\lambda)r}x_1 + \frac{(1-\lambda)}{\lambda t + (1-\lambda)r}y_1\right) +$$
$$(\lambda(1-t) + (1-\lambda)(1-r))\left(\frac{\lambda(1-t)}{\lambda(1-t) + (1-\lambda)(1-r)}x_2 + \frac{(1-\lambda)(1-r)}{\lambda(1-t) + (1-\lambda)(1-r)}y_2\right).$$

C'est-à dire $z = \mu(\rho x_1 + (1-\rho)y_1) + (1-\mu)(\theta x_2 + (1-\theta y_2)$ avec $\mu = \lambda t + (1-\lambda)r$, $\rho = \frac{\lambda t}{\lambda t+(1-\lambda)r}$ et $\theta = \frac{\lambda(1-t)}{\lambda(1-t)+(1-\lambda)(1-r)}$. Puisque λ, t et r sont dans $[0,1]$ on voit immédiatement que μ, ρ et θ sont aussi dans $[0,1]$. Puisque U est convexe, $z_1 = \rho x_1 + (1-\rho)y_1$ est dans U ; Puisque V est convexe, $z_2 = \theta x_2 + (1-\theta y_2$ est dans V. Donc $z = \mu z_1 + (1-\mu)z_2$ est dans $C(U,V)$. Ceci prouve que $C(U,V)$ est convexe.
Montrons maintenant que $C(u,V)$ est ouvert. Soit z dans $C(U,V)$; Il existe x dans U, y dans V et t dans $[0,1]$ tels que $z = tx + (1-t)y$.



Puisque U est ouvert, il existe $r_1 > 0$ tel que la boule $B(x,r_1)$ est incluse dans U. De même, puisque V est ouvert, il existe $r_2 > 0$ tel que la boule $B(y,r_2)$ est incluse dans V. Soit $r = \min(r_1,r_2)$. Le réel r est strictement positif et les boules $B(x,r)$ et $B(y,r)$ sont incluses respectivement dans U et V. Soit z_1 dans $B(z,r)$. Posons $x_1 = x + (z_1 - z)$ et $y_1 = y + (z_1 - Z)$. Alors $\|x_1 - x\| = \|z_1 - z\| < r$ et $\|y_1 - y\| = \|z_1 - z\| < r$. Donc x_1 et y_2 sont respectivement dans $B(x,r)$ et $B(y,r)$. par construction, cela implique que x_1 est dans U et y_1 est dans V. Mais $z_1 = z + (z_1 - z) = tx + (1-t)y + (t + (1-t)(z_1 - z)) = tx_1 + (1-t)y_1$. Donc z_1 est dans $C(U,V)$. Ceci prouve que $B(z,r)$ est incluse dans $C(U,V)$. Puisque pour tout z de $C(U,V)$, il existe $r > 0$ tel que $B(z,r)$ est incluse dans $C(U,V)$, ce dernier est ouvert.

Exercice 5: On considère $\mathbb{C}$ muni de sa norme usuelle et on fixe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continue telle que pour tout z non nul, on a : $|f(z)| < |z|$. On pose $f^n = f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f$ (composé n fois ; par exemple $f^2 = f \circ f$ et $f^0 = Id_{\mathbb{C}}$).
(1) Montrer que $f(0) = 0$. Donner un exemple de fonction f telle que $\sup_{z\neq 0}\left(\frac{|f(z)|}{|z|}\right) = 1$.
Soit $x_n = \frac{1}{2^n}$. Pour tout entier n non nul on a $|f(x_n)| < |x_n| = \frac{1}{2^n}$. Donc $\lim_{n\to+\infty} |f(x_n) - 0| = \lim_{n\to+\infty} |f(x_n)| = 0$. Par définition de la notion de limite, cela signifie que $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 0$ dans $\mathbb{C}$. Mais f est continue et $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(0)$. Donc $f(0) = 0$.
Puisque pour tout z non nul de $\mathbb{C}$, on a $|f(z)| < z$, on a $\sup_{z\neq 0}\left(\frac{|f(z)|}{|z|}\right) \leq 1$.
Considérons la fonction $\Theta : z \mapsto \frac{z}{|z|+1}$ sur $\mathbb{C}$. Elle est continue comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus

elle vérifie que pour tout z non nul $|\Theta(z)| < z$, et donc $\sup_{z\neq 0}\left(\frac{|\Theta(z)|}{|z|}\right) \leq 1$. Mais pour $x_n = \frac{1}{2^n}$, on a $\lim_{n\to+\infty}(\frac{|\Theta(x_n)|}{|x_n|} = 1$. Donc $\sup_{z\neq 0}\left(\frac{|\Theta(z)|}{|z|}\right) = 1$.

(2)Montrer que pour tout z de $\mathbb{C}$, la suite $(|f_n(z)|)_{n\geq 0}$ converge.

Si $z = 0$ Alors la suite $(|f^n(z)|)_{n\geq 0}$ est constante, égale à 0, donc elle converge. Si z est différent de 0, la suite $(|f^n(z)|)_{n\geq 0}$ est une suite réelle décroissante (par hypothèse sur f) et minorée par 0. Donc elle converge.

(3)Soit $r > 0$ et $\epsilon \in]0, r[$. Montrer qu'il existe α dans $[0, 1[$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \epsilon \leq |z| \leq r \Rightarrow |f(z)| \leq \alpha|z|.$$

En déduire que pour z dans $\overline{B}(0, r)$ et n dans $\mathbb{N}$ tels que $|f^n(z)| > \epsilon$, on a $|f^n(z)| \leq \alpha^n|z|$.

La fonction $\Upsilon \ : z \mapsto \left|\frac{f(z)}{z}\right|$ définie sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \epsilon \leq |z| \leq r\}$ est une une fonction continue à valeur dans $\mathbb{R}$. L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid \epsilon \leq |z| \leq r\}$ est borné et fermé (puisque c'est l'image réciproque de $[\epsilon, r]$ par la fonction continue $z \mapsto |z|$). L'espace vectoriel $\mathbb{C}$ est de dimension finie. Donc, $\{z \in \mathbb{C} \mid \epsilon \leq |z| \leq r\}$ est compact. Par conséquent par le théorème de Weierstrass, Υ est bornée et atteint ses bornes. en particulier, il existe z_0 avec $\epsilon \leq |z_0| \leq r$ tel que pour tout z vérifiant $\epsilon \leq |z| \leq r$ on a $\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq \left|\frac{f(z_0)}{z_0}\right| = \sup \Upsilon$. Donc si $\alpha = \left|\frac{f(z_0)}{z_0}\right|$, pour tout z dans $\mathbb{C}$ tel que $\epsilon \leq |z| \leq r$ on a $|f(z)| \leq \alpha|z|$. Puisque z_0 est différent de 0, par l'hypothèse faîte sur f, on a α dans $[0, 1[$.

Si z est dans $\overline{B}(0, r)$ et n est dans $\mathbb{N}$ tels que $|f^n(z)| > \epsilon$, alors pour tout j dans $\{1, \cdots, n-1\}$ on a $\epsilon < |f^n(z)| < |f^j(z)| \leq |f(z)| \leq r$. Donc, pour tout j dans $\{1, \cdots, n-1\}$ on a $|f^j(z)| \leq \alpha|f^{j-1}(z)|$. En particulier, $|f^n(z)| \leq \alpha^n|z|$.

(4)Montrer que la suite de fonctions $(f^n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur $\mathbb{C}$ vers une fonction g, que l'on précisera.

Montrons que la suite de fonctions $(f^n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{C}$. Soit z dans $\mathbb{C}$ et supposons que la suite $(f^n(z))_{n\geq 0}$ ne converge pas vers 0. Il existe alors $\epsilon > 0$ tel que pour tout entier N, il existe $n \geq N$ avec $|f^n(z)| \geq \epsilon$. Mais si $n \geq N$ alors $|f^n(z)| \leq |f^N(z)|$ puisque pour tout x de $\mathbb{C}$, on a $|f(x)| \leq |x|$. Donc, pour tout entier N, on a $|f^N(z)| \geq \epsilon$. Posons $r = |z|$ et α comme dans la question (3). Alors, pour tout entier N, on a $|f^N(z)| \leq \alpha^n|z|$; ceci implique que pour tout entier N, on a $\epsilon \leq \alpha^n|z|$. Mais cela est impossible puisque α est dans $[0, 1[$. Donc la suite $(f^n(z))_{n\geq 0}$ converge vers 0.

Montrer que la suite $(f^n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers la fonction g sur toute partie bornée de $\mathbb{C}$. A-t-on nécessairement convergence uniforme sur $\mathbb{C}$?

Soit X une partie bornée de $\mathbb{C}$. Il existe alors r tel que X est inclus dans $\overline{B}(0, r)$. On montre que pour tout $\epsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $n \geq N$ et tout z de X, on a $|f^n(z)| \leq \epsilon$. Puisque l'on a $|f(z)| \leq |z|$, il suffit de montre qu'il existe N tel que pour tout z de X, on a $|f^N(z)| \leq \epsilon$. Fixons donc $\epsilon > 0$. Soit $\alpha > 0$ comme dans la question (3) tel que si $|z|$ est dans $[\epsilon, r]$, alors $|f(z)| \leq \alpha|z|$. Puisque $0 \leq \alpha < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} \alpha^n r = 0$ et il existe

N tel que $0 \leq \alpha^n r < \epsilon$. Soit z dans X. Si $|z| \leq \epsilon$, alors $|f^N(z)| \leq |z| \leq \epsilon$. Si $\epsilon < |z| \leq r$, alors on a aussi $|f^N(z)| \leq \epsilon$ car sinon par la question (3), on aurait $\epsilon \leq |f^N(z)| \leq \alpha^N |z| \leq \alpha^N r < \epsilon$. Ce qui est absurde. Donc la suite de fonctions $(f^n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur X.
En général, on a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$, comme on le voit facilement avec l'exemple de la fonction Θ de la question 1.