Université de Caen **2006-2007**
UFR de Sciences

Licence de Sciences et Technologie
Année L3 - Parcours "Mathématiques"
Espace métrique - devoir 1

Exercice 1:
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et U une partie ouverte de E. A-t-on $\overset{\circ}{\overline{U}} = U$ en général ?

Exercice 2: Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.
(1) Soit a dans E et λ, r dans $\mathbb{R}$ strictement positifs.
Montrer que $\lambda \cdot B(a, r) = B(\lambda a, \lambda r)$.
(2) Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que si F est distinct de E, alors $\overset{\circ}{F} = \emptyset$ (On pourra utiliser la question précédente.).
(3) Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\overline{F}$ est aussi un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 3: On considère $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$. On pose $E^\star = E - \{(0, 0)\}$. On définie sur $E^\star \times E^\star$ l'application Δ par

$$\Delta(X, Y) = |\ \|X\|_2 - \|Y\|_2\ | + \frac{\|\ \|X\|_2 \cdot Y - \|Y\|_2 \cdot X\ \|_2}{\|X\|_2 \|Y\|_2}$$

pour X, Y dans $E^\star$.
(1) Montrer que Δ est une distance sur $E^\star$.
(2) Existe-t-il sur E une norme telle que Δ est une distance induite par la distance associèe à cette norme.
(3) Dessiner $\overline{B}((1, 0), 1)$ pour la distance Δ.

Exercice 4: Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit U et V deux ouverts convexes non vides de E. Montrer que le sous-ensemble

$$\{z \in E \mid \exists x \in U,\ \exists y \in V,\ \exists t \in [0, 1]\ /\ z = tx + (1 - t)y\}$$

est convexe et ouvert dans E.

Exercice 5: On rappelle que si f est continue de $E \to \mathbb{R}$, avec (E, d) un espace métrique, alors l'image de tout compact est compact.
On considère $\mathbb{C}$ muni de sa norme usuelle et on fixe $f\ : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continue telle que pour tout z non nul, on a : $|f(z)| < |z|$. On pose $f^n = f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f$

(composé n fois ; par exemple $f^2 = f \circ f$ et $f^0 = Id_{\mathbb{C}}$).
(1) Montrer que $f(0) = 0$. Donner un exemple de fonction f telle que $\sup_{z \neq 0} \left(\frac{|f(z)|}{|z|} \right) = 1$.
(2) Montrer que pour tout z de $\mathbb{C}$, la suite $(|f_n(z)|)_{n \geq 0}$ converge.
(3) Soit $r > 0$ et $\epsilon \in]0, r[$. Montrer qu'il existe α dans $[0, 1[$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \epsilon \leq |z| \leq r \Rightarrow |f(z)| \leq \alpha |z|.$$

En déduire que pour z dans $\overline{B}(0, r)$ et n dans $\mathbb{N}$ tels que $|f^n(z)| > \epsilon$, on a $|f^n(z)| \leq \alpha^n |z|$.
(4) Montrer que la suite de fonctions $(f^n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur $\mathbb{C}$ vers une fonction g, que l'on précisera. Montrer que la suite $(f^n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers la fonction g sur toute partie bornée de $\mathbb{C}$. A-t-on nécessairement convergence uniforme sur $\mathbb{C}$?