1 Séries numériques.

1.1 Définitions et premiers exemples.

Avertissement : Nous étudions dans ce cours les séries numériques réelles, à la fin quelques indications sur les séries numériques complexes seront données en complément.

Définition 1 *Soit $u = (u_n)$ une suite réelle, on appelle série numérique de terme général u_n la suite S définie par*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Le terme S_n s'appelle la somme partielle de la série.

Définition 2 *On dit que la série S de terme générale u_n est convergente si et seulement si la suite $S = (S_n)$ converge vers une limite finie s. Dans tous les autres cas la série est divergente.*

On note

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

Remarque 3 *Un cas particulier de divergence est celui où la série S tend vers $\pm\infty$. La série présente une limite mais est néanmoins divergente.*

Remarque 4 *On remarque sans peine que si on modifie un nombre* ***fini*** *de termes généraux de la série, la nature (convergente ou divergente) de cette dernière n'est pas modifiée. En effet : si n_0 est l'indice du dernier terme modifié, pour tout $n > n_0$ nous avons :*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n_0} u_k + \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

et la série modifiée est

$$S'_n = \sum_{k=0}^{n_0} u'_k + \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

les deux suites ne diffèrent que d'une constante ce qui ne modifie pas la nature de la série (mais la limite éventuelle est changée).

Remarque 5 *On en déduit aussi qu'on peut sans changer la nature de la série commencer la somme à l'indice n_0.*

Exemple 6 *La série la plus connue est la série géométrique de terme général* q.

Si $q = 0$ *alors* $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1$ *la série est convergente .*

Si $q = 1$ *alors* $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = n + 1$, *la série diverge vers* $+\infty$.

Si $q \neq 1$ *alors*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

La série converge vers

$$s = \frac{1}{1 - q}$$

si et seulement si $|q| < 1$.

La série diverge vers $+\infty$ *si* $q \geq 1$. *(En réintégrant le cas* $q = 1$ *)*

La série diverge sans limite si $q \leq 1$.

Exemple 7 *La série*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.(\text{ On rappelle que } 0! = 1)$$

Nous rappelons le développement limité de e^x *au voisinage de* 0 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}e^u}{(n+1)!}.$$

L'expression $\frac{x^{n+1}e^u}{(n+1)!}$ *est le reste de Lagrange avec* u *est compris entre* 0 *et* x. *Nous en déduisons que si* $x = 1$:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + \frac{e^u}{(n+1)!}$$

ou aussi bien

$$e - S_n = \frac{e^u}{(n+1)!}$$

Nous avons alors un majorant de la différence $e - S_n$ *qui est* $\frac{e}{(n+1)!}$ *et tend vers* 0 *quand* n *tend vers* $+\infty$.

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Exemple 8 *La série harmonique est*

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

On remarque que

$$\int_1^n \frac{1}{t}dt = \ln(n)$$
$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt \leq \frac{1}{p}$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt = \int_1^n \frac{1}{t}dt = \ln(n) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

On en déduit que la limite quand n tend vers $+\infty$ de la série harmonique est $+\infty$. Un phénomène remarquable est que la divergence de cette série est presque inaccessible au calcul numérique : La somme des termes compris entre $n_1 = 10^9$ et $n_2 = 2.10^9$ est inférieure à 1..

Proposition 9 *L'ensemble des séries numériques réelles convergentes forme un espace vectoriel. Ce résultat prouve que la somme de deux séries numériques convergentes est convergente et que le produit d'une série numérique convergente par un réel est convergente.*

1.2 Critères de divergence, critères de convergence.

Dans bien des cas, le calcul de la limite d'une série est un problème inabordable, mais la détermination de la nature de la série reste une information précieuse. En premier lieu, on ne se lance pas dans une recherche de limite si la série diverge. Si la série converge on peut se résigner à une détermination numérique d'une approximation de la limite.

Un critère de divergence.

Notation 10 *Une série est une suite et doit donc être notée comme telle, mais l'usage a simplifié les notations : la série de terme général u_n est souvent notée $\sum u_n$ sans autre indication. Si la série converge sa limite, la somme, sera notée $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$, puisque l'indice de départ joue un rôle dans la valeur de la limite.*

Soit une série $\sum u_n$, la différence $S_n - S_{n-1} = u_n$, si la série est convergente les deux suites (S_n) et (S_{n-1}) ont la même limite et alors

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Critère 11 *Si le terme général u_n de la série $\sum u_n$ ne tend pas vers 0, la série diverge. (Malheureusement la réciproque est fausse comme le montre la série harmonique).*

Critères de convergence des séries à termes positifs.

Soit une série $\sum u_n$ de terme général $u_n \geq 0$, la suite (S_n) est bien évidemment croissante. Si elle est majorée elle est convergente.

Remarque 12 *Les critères que nous allons voir s'appliquent à des séries de terme général u_n positifs à partir d'un rang n_0 puisque cela change la limite éventuelle mais pas la nature de la série.*

Remarque 13 *Les séries $\sum u_n$ sont soient convergentes soient divergentes vers $+\infty$.*

Proposition 14 ***Critère de comparaison :*** *Soient deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes positifs si*

à partir d'un certain rang n_0 : $u_n \leq v_n$ et si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

à partir d'un certain rang n_0 : $u_n \leq v_n$ et si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

□ On remarque que la suite $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ est une suite croissante, elle converge si et seulement si elle est majorée. Si elle diverge elle n'est pas majorée et sa limite est $+\infty$.

La deuxième partie de la proposition estla contraposée de la première partie.

Pour la première partie si $u_n \leq v_n$ alors $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k \leq \sum\limits_{k=0}^{n_0} u_k + \sum\limits_{k=n_0}^{n} v_k = \sum\limits_{k=0}^{n_0} u_k - \sum\limits_{k=0}^{n_0} v_k + \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$. Comme la série $\sum v_n$ converge vers v le nombre v est un majorant : $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k \leq \sum\limits_{k=0}^{n_0} u_k - \sum\limits_{k=0}^{n_0} v_k + v$. La suite est croissante majorée donc convergente vers $u \leq \sum\limits_{k=0}^{n_0} u_k - \sum\limits_{k=0}^{n_0} v_k + v$. ■

Exemple 15 *Une application traditionnelle est la suivante : pour tout $p \geq 2$ et $n > 1$ nous avons les inégalités*

$$\frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

La série de terme général $\frac{1}{n(n-1)}$ est telle que

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} (\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}) = 1 - \frac{1}{n}$$

qui converge trivialement vers 1. Toutes les séries de la forme

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^r}$$

sont convergentes si $r \geq 2$. (On sait que si $r = 1$ la série diverge donc si $r \leq 1$ également. Nous verrons un critère qui règle le problème pour $1 < r < 2$.)

Proposition 16 ***Critère d'équivalence :*** *Soient deux séries numériques* ***à termes positifs*** $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$*, on suppose que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = a > 0 :$$

alors les deux séries sont de même nature : elles sont simultanement convergentes ou simultanement divergentes.

□ On part de $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = a$ ce qui signifie qu'à partir d'un rang n_0 :

$$\frac{a}{2} < \frac{u_n}{v_n} < \frac{3a}{2}$$

ou bien

$$v_n < \frac{2}{a} u_n \text{ et } u_n < \frac{3a}{2} v_n.$$

Si la série $\sum u_n$ converge la série $\sum \frac{2}{a} u_n$ converge également et la série $\sum v_n$ aussi par majoration.

Si la série $\sum v_n$ converge la série $\sum_n \frac{2a}{2} v_n$ converge également et la série $\sum u_n$ aussi par majoration.

La condition sur la divergence est la contraposée du résultat que nous venons d'établir. ■

Exemple 17 *Soit la série* $\sum u_n$ *de terme général* $u_n = \frac{2n}{n^2+1}$*, on montre sans difficulté que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = 2.$$

La série harmonique étant divergente, c'est le cas de la série $\sum u_n$*.*

1.3 Critère de comparaison à des séries géométriques : les critères de Cauchy et de D'Alembert.

Les séries à termes positifs les plus simples sont les séries géométriques : $\sum q^n$ avec $q > 0$. Une comparaison d'une série $\sum u_n$ à termes positifs avec une série géométrique sera donc trés simple à mettre en oeuvre.

Proposition 18 ***Critère de Cauchy :*** *Soit la série* $\sum u_n$ *à termes positifs, on suppose que*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = q \geq 0$$

la série est convergente si $q < 1$*, elle est divergente si* $1 < q$*, sa nature est indéterminée si* $q = 1$*.*

□ Nous allons supposer que $q < 1$ alors à partir d'un certain rang n_0 : $\sqrt[n]{u_n} \leq q' < 1$ (par exemple $q' = (1+q)/2$) et on en déduit que

$$u_n \leq q'^n.$$

La série voit son terme général majoré par le terme général de la série géométrique convergente de raison $q' < 1$. Le raisonnement pour la divergence est le même dans son principe, on minore $\sqrt[n]{u_n}$ par $q" > 1$ et le résultat s'en suit. ■

Exemple 19 *Soit la série* $\sum u_n$ *de terme général* $u_n = (\frac{3n+5}{n^2})^n > 0$ *alors* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+5}{n^2} = 0$ *et la série est convergente.*

Exemple 20 *Un exemple d'indetermination est la série* $\sum u_n$ *de terme général* $u_n = \frac{1}{n^r}$, *avec* $n \geq 1$, *car* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{r}{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{-\frac{r}{n}\ln n} = 1$. *Ces séries sont convergentes ou divergentes suivant la valeur de* r.

Proposition 21 ***Critère de D'Alembert :*** *Soit la série* $\sum u_n$ *à termes positifs, on suppose que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q \geq 0$$

la série est convergente si $q < 1$, *elle est divergente si* $1 < q$, *sa nature est indéterminée si* $q = 1$.

□ Nous allons supposer que $q < 1$ alors à partir d'un certain rang n_0 : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q' < 1$ (par exemple $q' = (1+q)/2$) et on en déduit par récurrence que

$$u_n \leq \frac{u_{n_0}}{q^{n_0}} q'^n.$$

La série voit son terme général majoré par le terme général de la série géométrique convergente de raison $q' < 1$. Même principe de démonstration pour le cas de la divergence. ■

Exemple 22 *Soit la série* $\sum u_n$ *de terme général* $u_n = \frac{a^n}{n!}$ *avec* $u > 0$ *alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0$$

cette série converge quelque soit la valeur de a positive.

Les deux critères donnent les mêmes résultats mais sont plus ou moins commodes suivant le contexte.

Quand les critères de Cauchy ou de D'Alembert echouent nous pouvons faire une comparaison avec une intégrale :

Proposition 23 *Soit une série* $\sum u_n$ *de terme général* $u_n = f(n)$, *nous supposons que la fonction* f *est continue décroissante sur un intervalle* $[n_0, +\infty[$, F *désigne une primitive de* f :

si $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = L$ *alors la série est majorée donc convergente.*

si $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ *alors la série est divergente.*

□ Si $p \geq n_0$ si $p \leq t \leq p+1$

$$u_p \geq f(t) \geq u_{p+1}$$

$$u_p = \int_p^{p+1} u_p dt \geq \int_p^{p+1} f(t)dt \geq u_{p+1} = \int_p^{p+1} u_{p+1} dt$$

On en déduit que

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k \geq \int_{n_0}^{n+1} f(t)dt = F(n+1) - F(n_0) \geq \sum_{k=n_0}^{n+1} u_k - u_{n_0}$$

où F désigne une primitive de f. Si $\lim_{x \to +\infty} F(x) = L$ alors

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k \geq L - F(n_0)$$

et la série est convergente par majoration.

Si $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$ la suite $\sum_{k=n_0}^{n+1} u_k - u_{n_0}$ diverge par minoration ce qui entraine la divergence de la série. ■

Exemple 24 ***Séries de Riemann :*** *Dans une partie précédente du cours nous avons montré que les séries de terme général* $\frac{1}{n^r}$*, avec* $n \geq 1$*, sont convergentes si* $r \geq 2$ *et divergentes si* $r \leq 1$*. Ces séries portent le nom générique de Séries de Riemann, la fonction* $f(x) = \frac{1}{x^r}$ *avec* $1 < r < 2$ *est continue, positive et décroissante sur* $[1, +\infty[$*, une primitive est* $F(x) = \frac{1}{(r-1)x^{r-1}}$ *avec* $p - 1 > 0$ *donc* $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{(r-1)x^{r-1}} = 0$*.* ***Les séries de Riemann*** $\sum \frac{1}{k^r}$ ***sont convergentes si et seulement si*** $r > 1$*.*

1.4 Convergence absolue et séries alternées.

Nous ne supposons plus que la série $\sum u_n$ est à termes positifs. Si la série $\sum u_n$ converge nous dirons qu'elle converge (simplement), si la série $\sum |u_n|$ qui est elle à termes positifs converge nous dirons que $\sum u_n$ **converge absolument.**

Proposition 25 *La convergence absolue de la série* $\sum u_n$ *entraine sa convergence. La réciproque est fausse.*

□ Si la série $\sum u_n$ est à termes positifs les deux notions sont confondues, de même si $\sum u_n$ est à termes négatifs ou encore si $\sum u_n$ est de signe constant à partir d'un certain rang. Ce qui nous intéresse est le cas où il y a un nombre infini de terme de chaque signe. Définissons $u'_n = \max(u_n, 0)$ donc le nombre égal à u_n s'il est positif et nul sinon, de même $u_n^{''} = \min(0, u_n)$ vaut u_n s'il est négatif et 0 sinon. Alors $u_n = u_n' + u_n^{''}$ et $|u_n| = u_n' - u_n^{''}$ (Réflechissez quelques instants).

Supposons que la série $\sum u_n$ est absolument convergente donc $\sum |u_n| = \sum (u_n' - u_n^{''})$ est convergente. La série $u_n' \leq u_n$ et $-u_n^{''} \leq u_n$, les deux séries à termes positifs $\sum u_n'$ et $\sum -u_n^{''}$ sont donc convergentes par majoration. On en déduit les convergences des séries $\sum u_n'$ et $\sum u_n^{''}$ puis de leur somme $\sum u_n = \sum u_n' + \sum u_n^{''}$ ce qui prouve la convergence simple. ■

Exemple 26 *Nous avons vu que la série* $\sum \frac{u^n}{n!}$ *est convergente pour tout* $u \geq 0$, *elle est absolument convergente pour tout u réel.*

Le contre exemple nécessite d'étudier le critère des **séries alternées** :

Définition 27 *Soit la série* $\sum u_n$ *où* $u_n = (-1)^n v_n$ *avec* $v_n \geq 0$, *on appelle ce type de série une série alternée.*

Exemple 28 *La série* $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ *est une série alternée.*

Proposition 29 *Soit la série altérnée* $\sum (-1)^n v_n$, *si* (v_n) *est une* ***suite décroissante vers*** 0, *la série converge.*

□ Nous allons étudier les deux suites (S_{2m}) et (S_{2m+1}) :

$$\begin{aligned} S_{2m+2} - S_{2m} &= v_{2m} - v_{2m+1} \leq 0 \text{ la suite est décroissante.} \\ S_{2m+3} - S_{2m+1} &= -v_{2m+3} + v_{2m} \geq 0 \text{ la suite est croissante.} \\ S_{2m+1} - S_{2m} &= -v_{2m+1} \text{ la différence tend vers } 0 \end{aligned}$$

Les deux suites (S_{2m}) et (S_{2m+1}) sont adjacentes et donc convergent vers la même limite s. Soit $2m+1 \geq n \geq 2m$ (n est pair ou impair), pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un m_0 tel que si $m \geq m_0$: $|S_{2m} - s| < \varepsilon$ et $|S_{2m+1} - s| < \varepsilon$ alors si $n \geq 2m_0$

$$|S_n - s| < \varepsilon$$

ce qui prouve la convergence de la série. ■

Exemple 30 *La série La série* $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ *est une série alternée convergente alors que* $\sum \left| \frac{(-1)^n}{n+1} \right| = \sum \frac{1}{n+1}$ *est la série harmonique divergente.*

Remarque 31 *Il s'agit là de l'application la plus fréquente d'un critère plus général le* ***Critère d'Abel.***

Remarque 32 *La condition que* v_n *tend vers* 0 *va sans dire puisque c'est un critère de divergence.*

1.5 Quelques remarques sur les séries à termes complexes.

Une série à termes complexes s'écrit

$$\sum u_n = \sum (a_n + ib_n)$$

où a_n et b_n sont des réels.

Définition 33 *La série $\sum u_n = \sum (a_n + ib_n)$ converge si et seulement si les deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent. Elle diverge si et seulement si une au moins de ces deux séries diverge.*

Définition 34 ***Convergence absolue****. La série $\sum u_n = \sum (a_n + ib_n)$ est absolument convergente si et seulement si $\sum |u_n| = \sum \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ converge.*

Proposition 35 *Une série $\sum u_n = \sum (a_n + ib_n)$ absolument convergente est convergente, la réciproque est fausse.*

□ On remarque simplement que $|a_n| \leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ et $|b_n| \leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, la convergence de $\sum \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ entraine par majoration celles de $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ donc la convergence absolue de $\sum a_n$ et $\sum b_n$ ce qui donne le résultat final. ■