Suites numériques réelles ou complexes

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Definitions

1.1 Suite numérique

Définition 1 On appelle **suite numérique à valeur dans** $\mathbb{K}$ toute application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$. L'image de l'entier n par l'application u se note u_n.

Notation 1 La suite u sera souvent noté $(u_n)_{n\geq 0}$, et u_n s'appelle le **terme général** de la suite.

Exemple 1 $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = 4n + 2$. On a $u_0 = 2$; $u_1 = 6; u_2 = 10...$

Remarque 1 En pratique une suite ne commence pas nécessairement à $n = 0$. Si la suite u commence à n_0, on la notera $(u_n)_{n\geq 0}$.

Définition 2 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique à valeur dans $\mathbb{K}$.
(1) On dit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est **constante à partir d'un certain rang** s'il existe n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$ on a $u_n = u_{n_0}$. On dit que la suite est **constante** lorsque $n_0 = 0$.
(2) On dit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est **périodique, de période m à partir d'un certain rang** s'il existe n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$ on a $u_{n+m} = u_n$. On dit que la suite est **périodique** lorsque $n_0 = 0$.
(3) On dit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est **bornée** s'il existe M dans $\mathbb{R}^+$ tel que pour tout entier n, on a $|u_n| \leq M$.

1.2 Opérations sur les suites numériques

Définition 3 Soit $u = (u_n)_{n\geq 0}$ et $v = (v_n)_{n\geq 0}$ deux suites numériques à valeurs dans $\mathbb{K}$.
(1) On appelle **somme des suites u et v**, la suite, notée $u + v$, dont le terme général est $u_n + v_n$. Autrement dit, $(u_n)_{n\geq 0} + (v_n)_{n\geq 0} = (u_n + v_n)_{n\geq 0}$.
(2) On appelle **produit des suites u et v** la suite uv dont le terme général est $u_n v_n$. Autrement dit, $(u_n)_{n\geq 0}\,(v_n)_{n\geq 0} = (u_n v_n)_{n\geq 0}$.
S'il existe n_0 tel que v_n est différent de 0 pour $n \geq 0$, On appelle **quotient des suites u et v** la suite $\frac{u}{v}$ dont le terme général est $\frac{u_n}{v_n}$ pour $n \geq n_0$ (avec n_0 minimal). Autrement dit, $\frac{(u_n)_{n\geq 0}}{(v_n)_{n\geq 0}} = (\frac{u_n}{v_n})_{n\geq n_0}$
(4) Si λ est dans $\mathbb{K}$, alors on note $\lambda \cdot u$ la suite de terme général λu_n. autrement dit, $\lambda \cdot (u_n)_{n\geq 0} = (\lambda u_n)_{n\geq 0}$.

Notation 2 (1) Pour m dans $\mathbb{N}$, on note $[m]$ le suite dont le terme général est m. La suite $[0]$ s'appelle **la suite nulle**.
(2) On note $-(u_n)_{n\geq 0}$ la suite $(-1)\,(u_n)_{n\geq 0}$.

Proposition 4 *Soit* $u = (u_n)_{n\geq 0}$, $v = (v_n)_{n\geq 0}$ *et* $w = (w_n)_{n\geq 0}$ *trois suites numériques à valeurs dans* $\mathbb{K}$.
(1) On a

$$
\begin{array}{l}
((u_n)_{n\geq 0} + (v_n)_{n\geq 0}) + (w_n)_{n\geq 0} = (u_n)_{n\geq 0} + ((v_n)_{n\geq 0} + (w_n)_{n\geq 0});\\
(u_n)_{n\geq 0} + [0] = [0] + (u_n)_{n\geq 0} = (u_n)_{n\geq 0};\\
(u_n)_{n\geq 0} + (v_n)_{n\geq 0} = (v_n)_{n\geq 0} + (u_n)_{n\geq 0}\\
(u_n)_{n\geq 0} + (-(u_n)_{n\geq 0}) = [0].
\end{array}
$$

(2) On a

$$
\begin{array}{l}
((u_n)_{n\geq 0}\,(v_n)_{n\geq 0})\,(w_n)_{n\geq 0} = (u_n)_{n\geq 0}((v_n)_{n\geq 0}\,(w_n)_{n\geq 0});\\
(u_n)_{n\geq 0}\,(v_n)_{n\geq 0} = (v_n)_{n\geq 0}\,(u_n)_{n\geq 0};\\
(u_n)_{n\geq 0}[1] = [1]\,(u_n)_{n\geq 0};\\
\textit{pour tout } \lambda \in \mathbb{K},\\
\lambda \cdot ((u_n)_{n\geq 0}\,(v_n)_{n\geq 0}) = (\lambda \cdot (u_n)_{n\geq 0})\,(v_n)_{n\geq 0} = (u_n)_{n\geq 0}(\lambda \cdot (v_n)_{n\geq 0}).
\end{array}
$$

Preuve : exercice □

1.3 Sous-suite

Définition 5 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique à valeurs dans $\mathbb{K}$. On appelle **sous-suite** de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ toute suite $(v_n)_{n\geq 0}$ telle qu'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout entier n, on a $v_n = u_{\varphi(n)}$.

Exemple 2 (1) Soit $u_n = 2n$; la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par $v_n = 4n + 2$ est une sous suite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$. L'application φ est donnée par $\varphi(n) = 2n + 1$.
(2) Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite, alors les sous-suites $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ s'appellent respectivement **la sous-suite des termes paires** et **la sous-suite des termes impairs** de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

2 Convergence

Définition 6 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique à valeurs dans $\mathbb{K}$, et ℓ dans $\mathbb{K}$. On dit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ **converge vers** ℓ si :

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0,\ |u_n - \ell| \leq \epsilon$$

Dans ce cas, on dit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est **convergente** et ℓ s'appelle **la limite** de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$. On écrit alors $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$. Lorsque la suite ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**.

Proposition 7 *(Admis) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique à valeurs dans $\mathbb{K}$.*
(1) Si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge, alors sa limite est unique.
(2) Si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge, alors elle est bornée.

Remarque 2 Si une suite est constante à partir d'un certain rang, alors elle converge vers cette valeur constante.

2.1 Compatibilité aux opérations

Théorème 8 *(Admis) Soit $u = (u_n)_{n\geq 0}$ et $v = (v_n)_{n\geq 0}$ deux suites numériques à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que ces deux suites convergent, et on note ℓ et ℓ' leurs limites respectives.*
(1) La suite $u + v$ converge vers $\ell + \ell'$; autrement dit,

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n + \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

(2 La suite uv converge vers $\ell\ell'$; autrement dit,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = (\lim_{n\to+\infty} u_n)(\lim_{n\to+\infty} v_n).$$

(3) Si λ est dans $\mathbb{K}$, alors la suite $\lambda\cdot u$ converge vers $\lambda\ell$; autrement dit, La suite $u + v$ converge vers $\ell + \ell'$; autrement dit,

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda \lim_{n\to+\infty} u_n.$$

(4) si ℓ' est différent de 0, alors il existe n_0 tel que v_n est différent de 0 pour $n \geq n_0$. De plus la suite $\frac{u}{v}$ converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$; autrement dit

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim_{n\to+\infty} u_n}{\lim_{n\to+\infty} v_n}$$

2.2 Lien avec la continuité

Proposition 9 *(Admis) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit ℓ dans $\mathbb{K}$, et $f\ : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ une application continue en ℓ. Si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ, alors la suite $(f(u_n))_{n\geq 0}$ converge vers $f(\ell)$; c'est-à-dire que*

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} f(u_n)\right).$$

Exemple 3 Soit $v_n = (1 + \frac{1}{n})^3$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $v_n = f(u_n)$ avec $u_n = \frac{1}{n}$ et $f(x) = (1 + x)^3$. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0 et la fonction f est continue en 0. Donc la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ converge vers $f(0) = 1$.

2.3 Convergence et sous-suite

Proposition 10 *(Admis) Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite numérique à valeurs dans* $\mathbb{K}$*. Soit* ℓ *dans* $\mathbb{K}$*. Si la suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *converge vers* ℓ*, alors toute sous-suite de* $(u_n)_{n\geq 0}$ *converge aussi vers* $(u_n)_{n\geq 0}$*.*

Remarque 3 Ce resultat sert surtout pour montrer, en appliquant sa contraposée. Par exemple, la suite $((-1)^n)_{n\geq 0}$ ne converge pas, car les deux sous-suites des termes pairs et des termes impairs convergent vers des nombres réels différents (respectivement 1 et -1) .

2.4 Suites géométriques

Définition 11 On appelle **suite géométrique** toute suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de la forme $u_n = a^n$ avec a dans $\mathbb{C}$. Dans ce cas, a s'appelle la **raison** de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Proposition 12 *(Admis) Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite géométrique de raison* r*.*
(1) Si $|a| < 1$ *alors la suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *converge vers* 0*.*
(2) Si $a = 1$*, la suite est constante et converge vers* 1*.*
(3) Si $|a| > 1$*, ou bien* $|a| = 1$ *avec* $a \neq 1$*, alors la suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *diverge.*
(3) Si a *est dans* $\mathbb{R}$ *et* a *est strictement positif, alors la suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *tend vers* $+\infty$*.*

2.5 Suites numériques complexes

Le théorème 8 dit en particulier que si $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite complexe dont les parties réelles et imaginaires convergent, alors $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite convergente. Le résultat suivant dit que la réciproque est aussi vraie.

Corollaire 13 *On suppose* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*. La suite complexe* $(z_n)_{n\geq 0}$ *converge si et seulement si les suites réelles* $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\geq 0}$ *et* $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\geq 0}$ *convergent. De plus, dans ce cas, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(z_n) + i \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(z_n).$$

En utilisant ce résultat, l'étude de la convergence des suites complexes se ramène à l'étude de la convergence des suites réelles.

3 Suites numériques réelles

Nous nous concentrons désormais sur les suites réelles.

3.1 Quelques rappels sur $\mathbb{R}$

Commençons par quelques rappels sur les nombres réels. Nous allons énoncés maintenant quelques propriťés fondamentales de $\mathbb{R}$.

Proposition 14
$\mathbb{R}$ est totalement ordonné pour la relation d'ordre $\leq$.
En d'autres termes, pour tous x, y, z dans $\mathbb{R}$, on a :
(1)
  (a) $x \leq x$;
  (b) $x \leq y$ et $y \leq x$ impliquent $x = y$;
  (c) $x \leq y$ et $y \leq z$ impliquent $x \leq z$.
(2) $x \leq y$ ou $y \leq x$.
(3) $x \leq y$ implique $x + z \leq y + z$.
(4) $0 \leq x$ et $0 \leq y$ impliquent $0 \leq xy$.

Définition 15 (1) Une partie X non vide $\mathbb{R}$ est dite **majorée** s'il existe M dans $\mathbb{R}$ tel que pour tout x de X on a $x \leq M$. Dans ce cas, on dit que M est un majorant de X.
(2) Une partie X non vide $\mathbb{R}$ est dite **minorée** s'il existe m dans $\mathbb{R}$ tel que pour tout x de X on a $m \leq X$. Dans ce cas, on dit que m est un minorant de X.

Proposition 16 *(1) toute partie X non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède un plus petit majorant. Ce dernier s'appelle* **la borne supérieure** *de X et se note* $\sup(X)$.
(2) toute partie X non vide et minorée de $\mathbb{R}$ possède un plus grand minorant. Ce dernier s'appelle **la borne inférieure** *de X et se note* $\inf(X)$.

Par construction, si X est majorée, alors pour tout x de X, on a $x \leq \sup(X)$, et si pour tout de X, on a $x \leq M$, alors $\sup(X) \leq M$. Attention ! $\sup(X)$ n'est pas forcément dans X. Par exemple, $\sup[0, 1[= 1$.
De même, par construction, si X est minorée, alors pour tout x de X, on a $\inf(X) \leq x$, et si pour tout de X, on a $m \leq x$, alors $m \leq \inf(X)$. Attention ! $\inf(X)$ n'est pas forcément dans X. Par exemple, $\sup]0, 1] = 0$.

Proposition 17 *L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ est danse dans $\mathbb{R}$. Autrement dit, si x est dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(q_n)_{n\geq 0}$ telle que q_n est dans $\mathbb{Q}$ pour tout n, et $\lim_{n\to+\infty} q_n = x$.*

3.2 Suites monotones

Définition 18 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle. On dit que
(1) la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est **croissante** (à partir d'un certain rang) si pour tout n dans $\mathbb{N}$ (*resp.* avec $n \geq n_0$) on a $u_n \leq u_{n+1}$;
(2) la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est **décroissante** (à partir d'un certain rang) si pour tout n dans $\mathbb{N}$ (*resp.* avec $n \geq n_0$) on a $u_{n+1} \leq u_n$;

(3) la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est **majorée** si l'ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est majoré ;
(4) la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est **minorée** si l'ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est minnoré.

Notons que par définition, une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est constante à partir d'un certain rang si et seulement si elle est croissante et décroissante à partir d'un certain rang. D'autre part, une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée.

Notons que pour étudier si une suite est croissante (ou décroissante), on peut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ quand n varie. On peut aussi étudier la position de $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ par rapport à a (si u_n ne s'annule pas pour n assez grand bien entendu). L'un des résultat fondamental sur les suites et le suivant :

Théorème 19 *(1) Toute suite réelle croissante et majorée est convergente.*
(2) Toute suite réelle décroissante et minorée est convergente.

Preuve : (1) Supposons que $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante et majorée. Posons $\ell = \sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Soit $\epsilon > 0$. Par définition de ℓ, il existe N dans $\mathbb{N}$ tel que $\ell - \epsilon < u_N \leq \ell$. Mais la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante, donc pour tout $n \geq N$, on a $\epsilon < u_N \leq u_n \leq \ell$. D'où pour tout $n \geq N$, on a $|u_n - \ell| < \epsilon$. Donc la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ.
(2) Supposons que $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante et minorée. Alors la suite $-(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et majorée. Donc elle converge vers un certain réel ℓ par le *(1)*. Donc par la proposition 8, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers $-\ell$ dans $\mathbb{R}$.
□

3.3 Encadrement

Un moyen utile pour montrer la convergence d'une suite est de l'encadrer par deux autres suites :

Proposition 20 *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ trois suites réelles. Soit ℓ dans $\mathbb{R}$. On suppose que les suites $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ convergent vers ℓ. S'il existe N_0 dans $\mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$ on a*

$$v_n \leq u_n \leq w_n$$

alors la suite u_n converge vers ℓ.

Preuve : Soit $\epsilon > 0$. Il existe N_1 et N_2 tels que pour $n \geq N_1$, on a $|v_n - \ell| \leq \epsilon$, et $n \geq N_1$, on a $|w_n - \ell| \leq \epsilon$. On a pour $n \geq N_0$ on a $v_n - \ell \leq u_n - \ell \leq w_n - \ell$. Donc, pour $n \geq N_0$, on a $|U_n - \ell| \leq \max(|v_n - \ell|, |w_n - \ell|)$. Soit $N = \max(N_0, N_1, N_2)$. Pour $n \geq N$ on a donc $|U_n - \ell| \leq \epsilon$. D'où, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$. □

3.4 Suites équivalentes

Définition 21 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles. On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont équivalentes si $u_n = (1+\epsilon_n)v_n$ avec $\lim_{n\to+\infty} \epsilon_n = 0$. Dans ce cas, on écrit $u_n \sim v_n$.

Notons que si $(v_n)_{n\geq 0}$ ne s'annule pas, alors $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont équivalentes si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Proposition 22 *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ trois suites. Alors*
(1) $u_n \sim u_n$;
(2) si $u_n \sim v_n$ alors $v_n \sim u_n$;
si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$.

Proposition 23 *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ et $(t_n)_{n\geq 0}$ quatre suites telles que $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim t_n$. Alors : $u_n v_n \sim w_n t_n$ et $\frac{u_n}{v_n} \sim \frac{w_n}{t_n}$.*

Attention ! $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim t_n$ **n'impliquent pas** que $u_n + v_n \sim w_n + t_n$.

Proposition 24 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que la suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0 et que f possède un développement limité d'ordre k en 0 :*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots x_k x^k + x^k \epsilon(x) \ \textit{avec} \ \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0.$$

Alors $f(u_n) \sim a_0 + a_1 u_n + \cdots a_k (u_n)^k$.

Proposition 25 *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles. On suppose qu'il existe $N \geq$ tel que pour $n \geq N$, on a $u_n \geq 0$. Alors, les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont de même nature (l'une converge si et seulement si l'autre converge) et il existe M tel que pour $n \geq M$, on a $v_n \geq 0$.*
De plus, si $(u_n)_{n\geq 0}$ converge, alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n$$

Exemple 4 Soit $u_n = (1+\frac{1}{n})^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_n = e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}$. On a $\ln(1+x) = x + x\,\epsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$, et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.
Donc, $n\ln(1+\frac{1}{n}) \sim n \times \frac{1}{n} = 1 \geq 0$. D'où $\lim_{n\to+\infty} n\ln(1+\frac{1}{n}) = 1$. Puisque $x \to e^x$ est continue en 1, on trouve que

$$\lim_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$$

et pas 1 comme on pourrait le croire !

3.5 Limites infinies

Définition 26 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle.
(1) On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ tend vers $+\infty$ si

$$\forall A > 0 \ \exists N \geq 0 \text{ tel que } \forall n \geq N, \ u_n \geq A.$$

Dans ce cas, on écrit

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

(2) On dit qu $(u_n)_{n\geq 0}$ tend vers $-\infty$ si

$$\forall A > 0 \ \exists N \geq 0 \text{ tel que } \forall n \geq N, \ u_n \leq -A.$$

Dans ce cas, on écrit

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

Remarque : les règles habituelles sur les sommes, produits et quotients de limites restent valables, aux formes indéterminées près (des types $0 \times (\pm\infty)$, $\frac{\infty}{\infty}$ et $+\infty + (-\infty)$) et avec la convention que $\frac{1}{\infty} = 0$.

Proposition 27 *(1) Toute suite réelle croissante et non majorée tend vers $+\infty$.*
(1) Toute suite réelle décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.