# Système différentiel d'ordre 1 à coefficients constants

## 1 Système différentiel d'ordre 1

Dans tout le chapitre $n$ est un entier positif non nul et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

### 1.1 Introduction

**Définition 1** Soit $I$ un intervalle. On appelle **système différentiel sur $I$ d'ordre 1 à coefficients constants et à $n$ inconnues** $(x_1, \cdots, x_n)$, tout système de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} x_1'(t) = a_{1,1}x_1(t) + a_{1,2}x_2(t) + \cdots + a_{1,n}x_n(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) = a_{2,1}x_1(t) + a_{2,2}x_2(t) + \cdots + a_{2,n}x_n(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n,1}x_1(t) + a_{n,2}x_2(t) + \cdots + a_{n,n}x_n(t) + b_n(t) \end{array}\right. \qquad (*)$$

où $b_1, \cdots, b_n$ sont $n$ fonctions définies continues sur $I$, où les $a_{i,j}$ sont des constantes dans $\mathbb{K}$ et $(x_1, \cdots, x_n)$ est un $n$-uple de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur une partie $I$ de $\mathbb{R}$. On dit que le n-uple $(x_1, \cdots, x_n)$ est **une solution sur $I$ du système** s'il vérifie le système pour tout $t$ de $I$.
on dit que le système est **homogène** lorsque toutes les fonctions $b_i$ sont nulles sur $I$.

**Définition 2** Soit $I$ un intervalle et $b_1, \cdots, b_n$ des fonctions continues sur $I$. Soit $A$ dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ et $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$. On appelle **équation différentielle matricielle sur $I$ d'ordre 1 à coefficients constants** toute équation matricielle de la forme

$$X'(t) = AX(t) + B(t) \qquad (\dagger)$$

où $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $I$ dans $M_{n,1}(\mathbb{K})$.
On dit que $X$ est **une solution sur $I$ de l'équation** si cette dernière est vérifiée pour tout $t$ de $I$.
On dit que l'équation est **homogène** si toutes les fonctions $b_i$ sont nulles sur $I$, autrement dit si l'équation est de la forme $X'(t) = AX(t)$.

Rappelons que par définition $X$ est de classe $\mathcal{C}^1$ si chaque fonction $x_i$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Dans ce cas, on a $X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$.

Le résultat suivant est immédiat.

**Proposition 3** *Soit $I$ un intervalle et $(*)$ un système différentiel sur $I$ d'ordre 1 à coefficients constants et à $n$ inconnues $(x_1, \cdots, x_n)$ comme dans la définition 1. Posons :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & a_{i,j} & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

*Alors le n-uple de fonctions $(x_1, \cdots, x_n)$ est solution du systeme $S$ sur $I$ si et seulement si la fonction $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ est solution sur $I$ de l'équation matricielle*

$$X'(t) = AX(t) + B(t).$$

**Exemple 1** Considérons le système

$$(S) : \left\{ \begin{array}{lclclcll} x'(t) & = & 3x(t) & + & y(t) & - & z(t) & +e^t \\ y'(t) & = & & & 2y(y) & + & z(t) & \\ z'(t) & = & & & & & 3z(t) & +cos(t) \end{array} \right.$$

Posons $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ cos(t) \end{pmatrix}$.

Alors, les fonctions $x, y, z$ sont solutions de $(S)$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si la fonction $t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $(E) : X'(t) = AX(t) + B(t)$.

# 2 Résolution d'une équation différentielle matricielle d'ordre 1

**Théorème 4** *(Admis) Soit $I$ un intervalle et $A$ dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation matricielle d'ordre 1 homogène $X' = AX$ sont de la forme*

$$X \ : t \mapsto X(t) = Exp(tA)C$$

*où $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ avec $c_1, \cdots, c_n$ des constantes dans $\mathbb{R}$.*

**Exemple 2** Reprenons l'exemple 1 et Considérons l'équation matricielle homogène $I_0 \ : \ X'(t))AX(t)$. Les solutions de cette équation sont de la forme $X \ : t \mapsto X(t) = Exp(tA)C$ avec $C = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \beta, \gamma$ des constantes de $\mathbb{R}$.
On a vu au chapitre précédent que

$$Exp(tA) = 3e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2e^{2t} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les solutions de $I_0$ sont donc de la forme $t \mapsto \begin{pmatrix} 3(\alpha+\beta-\gamma)e^{3t} + 2(-\beta+\gamma)e^{2t} \\ 3\gamma e^{3t} + 2(\beta-\gamma)e^{2t} \\ 3\gamma e^{3t} \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \beta, \gamma$ des constantes dans $\mathbb{R}$. Donc, les solutions du système homogène

$$S_0 : \left\{ \begin{array}{lclclcl} x'(t) & = & 3x(t) & + & y(t) & - & z(t) \\ y'(t) & = & & & 2y(y) & + & z(t) \\ z'(t) & = & & & & & 3z(t) \end{array} \right.$$

sont les triples $(x, y, z)$ avec

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = 3(\alpha+\beta-\gamma)e^{3t} + 2(-\beta+\gamma)e^{2t} \\ y(t) = 3\gamma e^{3t} + 2(\beta-\gamma)e^{2t} \\ z(t) = 3\gamma e^{3t} \end{array} \right.$$

avec $\alpha, \beta, \gamma$ des constantes dans $\mathbb{R}$.

Comme dans le cas classique des équations différentielles, on trouve les solution d'une ̧quation différentielle matricielle en résolvant l'équation homogène associée :

**Proposition 5** *Soit $I$ un intervalle et $b_1, \cdots, b_n$ des fonctions continues sur $I$. Soit $A$ dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ et $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$. Soit $t \mapsto Z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix}$ une solution sur $I$ de l'équation différentielle matricielle $(E) : X'(t) = AX(t) + B(t)$. Les solution sur $I$ de $(E)$ sont les fonctions de la forme*

$$X \ : t \mapsto X(t) = Exp(tA)C + Z(t)$$

*où $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, avec $c_1, \cdots, c_n$ des constantes quelconques dans $\mathbb{R}$.*

Preuve. Puisque $Z$ est une solution sur $I$ de $(E)$, il est clair que $X$ est une autre solution de $(E)$ sur $I$ si et seulement si pour tout $t$ de $I$, on a l'égalité $X'(t) - AX(t) = Z'(t) - AZ(t)$, c'est-à-dire si pour tout $t$ de $I$, on a $(X-Z)'(t) = A(X-Z)(t)$. D'après le théorème précédent, ceci est vrai si et seulement si $X(t) - Z(t) = Exp(tA)C$, avec $C$ comme dans l'énoncé de la proposition. $\square$

Le résultat suivant permet d'obtenir la résolution complète d'une équation matricielle d'ordre 1 et à coefficients constants.

**Proposition 6** *Soit $I$ un intervalle et $b_1, \cdots, b_n$ des fonctions continues sur $I$. Soit $A$ dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ et $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$. Soit $Z : t \mapsto Z(t) = Exp(tA)G(t)$ avec $G$ est une primitive quelconque de la fonction $t \mapsto Exp(-tA)B(t)$. Alors, la fonction $Z$ est solution sur $I$ de l'équation différentielle matricielle $(E)$ : $X'(t) = AX(t) + B(t)$.*

Attention : On fait ici des produits de matrices et l'ordre a donc de l'importance. Il n'y a aucune raison en général que l'on est $Exp(tA)G(t) = G(t)Exp(tA)$. Notons que $t \mapsto Exp(-tA)B(t)$ est bien une fonction de $I$ dans $M_{n,1}(\mathbb{K})$ et que c'est donc aussi le cas de $G$. Donc $t \mapsto Exp(tA)G(t)$ est bien une fonction de $I$ dans $M_{n,1}(\mathbb{K})$ ; c'est-à-dire que pour tout $t$ dans $I$ la matrice $G(t)$ possède une seule colonne et $n$ ligne.

Preuve : La méthode pour prouver ce résultat est encore une fois la méthode de variation de la constante. Soit $G$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $I$ et $Z(t) = Exp(tA)G(t)$ pour $t$ dans $I$. Alors, la fonction $Z$ est solution de l'équation $(E)$ : $X'(t) = AX(t) + B(t)$ si et seulement si pour tout $t$ dans $I$, on a $Z'(t) = AZ(t) + B(t)$. Mais $Z'(t) = (Exp(tA))'G(t) + Exp(tA)G'(t) = AExp(tA)G(t) + Exp(tA)G'(t)$. Donc, $Z$ est solution de l'équation $(E)$ : $X'(t) = AX(t) + B(t)$ si et seulement si pour tout $t$ dans $I$ on a $Exp(tA)G'(t) = B(t)$. Mais l'inverse de la fonction $t \to Exp(tA)$ est la fonction $t \to Exp(-tA)$. D'où la fonction $Z$ est solution de l'équation $(I)$ si et seulement si $G'(t) = Exp(-tA)B(t)$. $\square$

**Exemple 3** Reprenons l'exemple 1. On a

$$Exp(-tA) = 3e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2e^{-2t}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc, $Exp(-tA)B(t) =$

$$3e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ cos(t) \end{pmatrix} + 2e^{-2t}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ cos(t) \end{pmatrix}$$

$$= 3e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3e^{-3t}cos(t)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2e^{-2t}cos(t)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Une primitive de $t \mapsto e^{-3t}cos(t)$ est $t \mapsto \frac{1}{10}e^{-3t}(-3cos(t)+sin(t))$ ; une primitive de $t \mapsto e^{-2t}cos(t)$ est $t \mapsto -\frac{1}{5}e^{-2t}(cos(t)+2sin(t))$ Donc une primitive de $G\ : t \mapsto Exp(-tA)B(t)$ est donc

$$t \mapsto \frac{3}{2}e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{10}e^{-3t}(-3cos(t)+sin(t))\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$-\frac{1}{5}e^{-2t}(cos(t)+2sin(t))\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il reste alors à calculer $Exp(tA)G(t)$.

$$Exp(tA)G(t) = 3e^{3t}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} G(t) + 2e^{2t}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} G(t) =$$
$$\frac{9}{2}e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{10}(-3cos(t)+sin(t))\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{5}(cos(t)+2sin(t))\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$
$$\frac{9}{2}e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{10}cos(t)\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} + \frac{1}{10}sin(t)\begin{pmatrix} -11 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

On obtient donc les solutions de l'équation $(E)\ : X'(t) = AX(t) + B(t)$. La fonction $X\ : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ est solution de $E$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$X(t) = 3e^{3t}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + 2e^{2t}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$
$$+\frac{9}{2}e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{10}cos(t)\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} + \frac{1}{10}sin(t)\begin{pmatrix} -11 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

avec $c_1, c_2, c_3$ trois constantes réelles quelconques.
Les triples de fonctions $(x, y, z)$ solutions sur $\mathbb{R}$ du système $(S)$ sont donc de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = 3(c_1+c_2-c_3)e^{3t} + 2(-c_2+c_3)e^{2t} + \frac{1}{10}(9e^t + 5cos(t) - 11sin(t)) \\ y(t) = 3c_3e^{3t} + 2(c_2-c_3)e^{2t} + \frac{1}{10}(-5cos(t) + 11sin(t)) \\ z(t) = 3c_3e^{3t} + \frac{1}{10}(9cos(t) + 3sin(t)) \end{array}\right.$$

avec $c_1, c_2, c_3$ trois constantes réelles quelconques.