1 Intégrales multiples :

1.1 Quelques rappels sur les fonctions de plusieurs variables.

1.1.1 Fonction de plusieurs variables

On se place dans un espace $E = \mathbb{R}^n$ dans lequel on définit une distance euclidienne :

$$d(X,Y) = \|Y - X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2}.$$

Dans la plupart des applications de ce cours $n = 2$ ou 3 ce qui donne alors

$$\begin{aligned} n = 2 : \quad & \|Y - X\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} \\ n = 3 : \quad & \|Y - X\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2} \end{aligned}$$

et tout le monde reconnait là la distance dans le plan ou l'espace euclidien.Ce n'est pas la seule définition possible pour une distance mais elles sont toutes équivalentes dans $\mathbb{R}^n$ et nous utiliserons seulement celle ci.

Quand on fait de l'analyse dans $\mathbb{R}$ on utilise les intervalles ouverts $]a, b[$ ou $]x_0 - r, x_0 + r[$, ces intervalles ont des analogues dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ et aussi dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 1 *On appelle **pavé ouvert** de $\mathbb{R}^n$, l'ensemble $]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\times \ldots \times]a_n, b_n[= \{\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)\ /\ \forall i :\ a_i < x_i < b_i\}$. Dans $\mathbb{R}^2$ on obtient un rectangle privé de ses bords et dans $\mathbb{R}^3$ un parallélépipède également privé de ses bords.*

Définition 2 *On appelle **boule ouverte** de centre $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et de rayon $r > 0$ l'ensemble $B_{A,r} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\ /\ \sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2 < r^2\}$. Pour $\mathbb{R}^2$ c'est un disque de centre A de rayon r privé de son cercle contour et pour $\mathbb{R}^3$ une boule privée de la sphère contour.*

Définition 3 *Une partie U de $\mathbb{R}^n$ est appelée un **ouvert** si et seulement si, pour tout point M de U, on peut trouver une boule ouverte de centre M, de rayon r, incluse dans U. Cette définition est technique, il faut savoir que les boules ouvertes et les pavés ouverts sont des ouverts.*

□ Plaçons nous dans $\mathbb{R}^2$ et voyons pourquoi un pavé ouvert est un ouvert, la démonstration consiste à formaliser ce qui va être dit. Si M est dans un pavé ouvert, il n'est pas sur le bord car celui ci est exclu, le point M est aux distances $d_1 > 0$, $d_2 > 0$, $d_3 > 0$ et $d_4 > 0$ des cotés du pavé. Soit d la plus petite de ces distances, le disque ouvert de centre M de rayon $r = \frac{d}{2}$ est inclus dans le pavé ce qui montre que celui ci est un ouvert. ■

Définition 4 *Si une partie F de $\mathbb{R}^n$ a pour complémentaire une partie $U = \mathbb{R}^n - F$ qui est un ouvert, F est un **fermé**.*

Définition 5 *Une fonction réelle à n variables f est une fonction de* $E = \mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f : E = \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, .., x_n) &\mapsto f(x_1, x_2, ..., x_n) \end{aligned}$$

par exemple :

$$\begin{aligned} f : E = \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) = \tfrac{x-y}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f : E = \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto f(x, y, z) = xe^{y+3z} \end{aligned}$$

L'ensemble de définition d'une telle fonction est une partie D de $\mathbb{R}^n$.

1.1.2 Continuité :

Nous allons simplement donner une définition d'une fonction continue en un point.

Définition 6 *On considère une fonction f définie sur une partie ouverte D de* $\mathbb{R}^n$ *et soit* $A = (a_1, a_2, ..., a_n) \in D$*, la fonction f est* ***continue*** *en A si et seulement si, quand* $(x_1, x_2, ..., x_n)$ *tend vers* $(a_1, a_2, ..., a_n)$*, la limite de* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *est* $f(a_1, a_2, ..., a_n)$.

La difficulté consiste juste à définir la périphrase "$(x_1, x_2, ..., x_n)$ *tend vers* $(a_1, a_2, ..., a_n)$", elle signifie que la distance

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2} \text{ tend vers } 0.$$

On obtient alors une définition plus précise :

Définition 7 *On considère une fonction f définie sur une partie ouverte D de* $\mathbb{R}^n$ *et soit* $A = (a_1, a_2, ..., a_n) \in D$*, la fonction f est* ***continue*** *en A si et seulement si pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\rho > 0$*, quelque soit* $(x_1, x_2, ..., x_n)$ *tel que* $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2} < \rho$ *alors*

$$|f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n)| < \varepsilon.$$

Il suffira de comprendre qu'il s'agit d'empécher les situations du type suivant :

Exemple 8 *Soit* $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$ *si* $(x, y) \neq (0, 0)$ *et* $f(0, 0) = 1$*. On va faire tendre* (x, y) *vers* $(0, 0)$ *de différentes manières :*

1. *On suit la droite* $y = x$ *alors* $f(x, y) = f(x, x) = \frac{1}{2}$ *et la limite est* $\frac{1}{2}$.

2. *On suit la droite $y = 2x$ alors $f(x,y) = f(x,2x) = \frac{1}{5}$ et la limite est $\frac{1}{5}$.*
3. *Si on veut obtenir la limite $0 < a < 1$, on résout l'équation $\frac{1}{1+t^2} = a$ donc $t = \sqrt{\frac{1}{a} - 1}$ et on suit la droite $y = tx$.*

On retiendra que les fonctions polynômes, fonctions rationnelles et composées de ces fonctions avec des fonctions continues "classiques" sont continues sur leur ensemble de définition.

1.1.3 Dérivées partielles et différentielle.

On considère donc une fonction f à n variables de $E = \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et soit un élement $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ de D l'ensemble de définition de f. On peut alors définir n fonctions partielles $f_1, ..., f_n$ en posant

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= f(x_1, a_2, .., a_n) \\ f_2(x_2) &= f(a_1, x_2, a_3, ..a_n) \\ \text{et } f_n(x_n) &= f(a_1, ..., a_{n-1}, x_n). \end{aligned}$$

On ne peut pas dire grand chose à priori de ces fonctions si ce n'est que f_1 est définie en a_1, f_2 en a_2 etc...

En général on choisit A dans D de telle sorte qu'il existe un nombre strictement positif $\varepsilon > 0$ tel que la **boule** de centre A de rayon ε soit incluse dans D :[1]

$$B_{(A,\varepsilon)} = \{X \in D \ / \ \|X - A\| < \varepsilon\}.$$

Par exemple prenons la fonction :

$$\begin{aligned} &f : E = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ &(x,y) \mapsto f(x,y) = \tfrac{x-y}{x^2+y^2} \end{aligned},$$

f est définie si et seulement si $X = (x,y) \neq O = (0,0)$, on va donc choisir un élément $A = (a,b)$ tel que $a^2 + b^2 \neq 0$ (ce qui nous assure que A n'est pas égal à O. Si on prend un nombre $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ aucun des éléments X tels que $\|X - A\| < \varepsilon$ n'est égal à O. On en déduit que

$$B_{(A,\varepsilon)} \subset D.$$

[2]

Définition 9 *Soit f une fonction définie sur D et soit $A = (a_1, a_2, .., a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, .., a_n)$ un élément de l'intérieur de D, soit la fonction partielle f_k, si f_k est dérivable en a_k, sa dérivée f'_k est appelée la dérivée partielle de f en x_k, elle est notée*

$$f'_k(A) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a_1, a_2, .., a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, .., a_n).$$

[1] On se place dans l'*interieur* de D qui est un ouvert.

[2] Exercice : Faites des dessins pour y voir clair. Choisissez des valeurs numériques différentes pour a et b et regardez ce qui se passe.

Exemple 10 *Soit la fonction f définie par $f(x,y)=\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, elle est définie et continue sur $D=\mathbb{R}^n-\{(0,0)\}$, elle a deux dérivées partielles sur D,*

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{(x+y)y}{\sqrt{x^2+y^2}^3}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-(x+y)x}{\sqrt{x^2+y^2}^3}$$

Remarque 11 *la notion de dérivée partielle n'a aucun lien avec une éventuelle notion de dérivée de f.*

Définition 12 *Si on peut définir les dérivées partielles d'une fonction sur D tout entier ou à défaut sur un ouvert D' de D, on a n fonctions de $(x_1,x_2,...,x_n)$ qui sont susceptibles d'être partiellement dérivables, on a alors n^2 dérivées partielles secondes.*

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_k}.$$

Exemple 13 *Reprenons $f(x,y)=\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, ses deux dérivées partielles sont partiellement dérivables sur D et on a quatre dérivées partielles secondes*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{(x+y)y}{\sqrt{x^2+y^2}^3}=-y\frac{2x^2-y^2+3xy}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{(x+y)y}{\sqrt{x^2+y^2}^3}=\frac{2x^2y-y^3+x^3-2y^2x}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{-(x+y)x}{\sqrt{x^2+y^2}^3}=\frac{2x^2y-y^3+x^3-2y^2x}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{-(x+y)x}{\sqrt{x^2+y^2}^3}=-x\frac{x^2-2y^2-3xy}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

Remarque 14 *Il est important de distinguer $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ qui diffèrent par l'ordre des dérivations, mais le calcul que nous venons de faire donne à*

Remarque 15 *penser que les résultats sont égaux, c'est l'**égalité de Schwartz :***

Proposition 16 ***Egalité de Schwartz :** si $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_l}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_l\partial x_k}$ pour $k\neq l$ sont continues sur un ouvert D alors elles sont égales.*

Définition 17 *Si une fonction f est définie sur D et si elle admet sur une partie D' de D des dérivées partielles continues, on dit que f est de classe C^1 sur D', si f admet sur D' des dérivées partielles secondes continues alors f est de classe C^2 etc...*

Nous nous plaçons dans le cas où $n=2$ mais ce que nous allons dire se généralise sans difficulté autre que l'extrême longueur de l'écriture.

Proposition 18 *Nous supposons que f est de classe C^1 sur D et soit $A = (a_1, a_2)$ un point de D et soient h et k deux réels "petits", alors*

$$f(a_1 + h, a_2 + k) = f(a_1, a_2) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) + o(h, k)$$

La fonction $o(h, k)$ tend vers 0 quand $\sqrt{h^2 + k^2}$ tend vers 0 mais mieux :

$$\lim_{\sqrt{h^2+k^2}\to 0} \frac{o(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

La proposition doit être vue comme l'analogue de la condition

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Définition 19 *La fonction $(h, k) \to h\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)$ est une fonction linéaire en (h, k) qui s'appelle la différentielle de f. On la note plutôt*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + k\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

où dx et dy sont les différentielles des fonctions $(x, y) \to x$ et $(x, y) \to y$.

L'intérêt de cette notation est évident si on fait un *changement de variables :*
Considérons la fonction $f(x, y) = xy$, les coordonnées polaires sont données par les fonctions $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$ qui sont donc des fonctions de deux variables (ρ, θ).

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho\cos\theta\sin\theta = g(\rho, \theta).$$

Nous avons les dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \frac{\partial f}{\partial y} = x$$
$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = 2\rho\cos\theta\sin\theta, \frac{\partial f}{\partial \theta} = \rho^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

On peut aussi utiliser la différentielle :

$$df = ydx + xdy, \quad dx = \cos\theta d\rho - \rho\sin\theta d\theta \text{ et } dy = \sin\theta d\rho + \rho\cos\theta d\theta$$
$$df = \rho\sin\theta(\cos\theta d\rho - \rho\sin\theta d\theta) + \rho\cos\theta(\sin\theta d\rho + \rho\cos\theta d\theta)$$
$$df = 2\rho\cos\theta\sin\theta d\rho + \rho^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)d\theta$$

et on identifie pour retrouver le résultat précédent.[3]

[3] Nous ne verrons pas une méthode beaucoup plus satisfaisante intellectuellement qui consiste à remarquer qu'un changement de variable est une fonction vectorielle de plusieurs variables et à définir la matrice de l'application linéaire différentielle appellée aussi matrice jacobienne.

1.2 Intégrales multiples.

Avertissement : Il n'est pas question de faire la théorie générale de l'intégration multiple, nous nous limiterons à l'intégration de fonctions continues sur des sous ensembles "compact" de $\mathbb{R}^n$ avec $n = 2$ ou 3. Pour entrevoir le problème de base considérons une fonction f continue sur un pavé $[a,b] \times [c,d]$ de $\mathbb{R}^2$ et cherchons à l'intégrer sur un sous ensemble $D \subset [a,b] \times [c,d]$.

On comprend bien qu'il faut intégrer suivant l'"élément de surface" $dxdy$ mais c'est pratiquement impossible. Faut-il donc commencer par intégrer en x ou en y et obtient-on le même résultat ?.

Etudions la situation dans le cas où $D = [a,b] \times [c,d]$, on peut commencer par calculer $F(x) = \int_c^d f(x,y)dy$ puis

$$\int_a^b F(x)dx = \int_a^b (\int_c^d f(x,y)dy)dx$$

ou bien $G(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ puis

$$\int_c^d G(y)dy = \int_c^d (\int_a^b f(x,y)dx)dy.$$

Il n'y a pas de raison pour qu'on obtienne la même valeur. Heureusement, avec des conditions tout de même assez fréquentes c'est le cas.

Théorème 20 ***Théorème de Fubini : (ADMIS)*** *Si f est* ***continue*** *sur le pavé $[a,b] \times [c,d]$ les deux intégrales*

$$\int_a^b (\int_c^d f(x,y)dy)dx \text{ et } \int_c^d (\int_a^b f(x,y)dx)dy$$

sont égales et leur valeur commune est notée :

$$\int\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy.$$

Attention : *La notation $dxdy$* ***n'est pas un produit****.*

Exemple 21 *Soit $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{y^2}$ sur le pavé $[0,1] \times [1,2]$:*

$$\int_1^2 \frac{x^2+y^2}{y^2}dy = [y - \frac{x^2}{y}]_1^2 = 1 + \frac{x^2}{2}, \qquad \int_0^1 (1 + \frac{x^2}{2})dx = [x + \frac{x^3}{6}]_0^1 = \frac{7}{6}$$

$$\int_0^1 \frac{x^2+y^2}{y^2}dx = [\frac{x^3}{3y^2} + x]_0^1 = 1 + \frac{1}{3y^2}, \qquad \int_1^2 (1 + \frac{1}{3y^2})dy = [y - \frac{1}{3y}]_1^2 = \frac{7}{6}$$

Ce résultat est bien commode même s'il n'a rien d'évident, la condition f est continue peut être affaiblie mais suffira dans les applications que nous verrons.

Nous avons une généralisation en dimension 3 que nous ne détaillerons pas.

Théorème 22 *Supposons que la fonction f soit continue sur un ouvert D qui contient le pavé $P = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$, nous avons*

$$\int\int\int_P f(x,y,z)dxdydz = \int_e^f (\int\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y,z)dxdy)dz = \int\int_{[a,b]\times[c,d]} (\int_e^f f(x,y,z)dz)dxdy$$

*La première intégrale s'appelle une **intégration par tranches** (on somme d'abord par tranches horizontales), la deuxième une **intégration par piles** (on intégre d'abord verticalement).*

Bien sûr toutes les permutations des variables sont possibles.

Exemple 23 *En dimension 3, soit $f(x,y,z) = (x^2 + 2y^2 + 3z^2)$ sur le pavé $P = [0,1] \times [-1,2] \times [-1,0]$ nous pouvons faire le calcul de nombreuses façons différentes :*

$$F(x,y) = \int_{-1}^0 f(x,y,z)dz = \int_{-1}^0 (x^2 + 2y^2 + 3z^2)dz = x^2 + 2y^2 + 1$$

$$I = \int_{[0,1]\times[-1,2]} (x^2 + 2y^2 + 1)dxdy = 10$$

ou bien

$$G(x,z) = \int_{-1}^2 f(x,y,z)dy = 3x^2 + 6 + 9z^2$$

$$I = \int_{[0,1]\times[-1,0]} (3x^2 + 6 + 9z^2)dxdz = 10$$

enfin

$$H(y,z) = \int_0^1 f(x,y,z)dx = \frac{1}{3} + 2y^2 + 3z^2$$

$$I = \int_{[-1,2]\times[-1,0]} (\frac{1}{3} + 2y^2 + 3z^2)dydz = 10$$

La continuité de f et le théorème de Fubuni nous assurent que l'ordre dans lequel on fait les intégrations ne joue pas de rôle.

Intégrales sur d'autres types d'ensembles compacts. Les ensembles sur lesquels nous allons intégrer sont *inclus dans des pavés compacts.*

Soit un ensemble Δ inclus dans un compact $[a,b] \times [c,d]$.

Supposons qu'il existe deux fonctions α et β definies et *continues* sur $[a,b]$ telles que pour tout $x \in [a,b]$, le point $M(x,y)$ appartient à Δ si et seulement si

$$c \leq \alpha(x) \leq y \leq \beta(x) \leq d.$$

On peut donc poser :

$$\Delta = \{M(x,y) \ / \ a \leq x \leq b \text{ et } c \leq \alpha(x) \leq y \leq \beta(x) \leq d\}.$$

On peut aussi supposer qu'il existe deux fonctions γ et δ definies et *continues* sur $[c, d]$ telles que pour tout $y \in [c, d]$, le point $M(x, y)$ appartient à Δ si et seulement si

$$a \leq \gamma(y) \leq x \leq \delta(y) \leq d.$$

On peut donc poser :

$$\Delta = \{M(x, y) \ / \ c \leq y \leq d \text{ et } a \leq \gamma(y) \leq x \leq \delta(y) \leq d\}.$$

Il n'y a aucune raison de penser qu'une de ces deux définitions soit la meilleure, trés souvent elles coexistent et seul le côté "pratique" permet de les départager.

Nous pouvons reprendre la problèmatique précédente et nous avons :

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)dy \text{ et } I = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b (\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)dy)dx$$
$$G(y) = \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y)dx \text{ et } J = \int_c^d G(y)dy = \int_c^d (\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y)dx)dy$$

Théorème 24 ***Théorème de Fubini :*** *Si f est* ***continue*** *sur un pavé $[a, b] \times [c, d]$ contenant l'ensemble compact Δ, les deux intégrales sont égales et leur valeur commune est notée :*

$$\int \int_\Delta f(x, y)dxdy = \int_a^b (\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)dy)dx = \int_c^d (\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y)dx)dy.$$

Exemple 25 *Soit le triangle Δ de sommets $A(0, 0)$, $B(0, 1)$ et $C(1, 1)$, soit la fonction $f(x, y) = y^3 - x^3$ qui est continue sur $\mathbb{R}^2$[4]. Calculons $I = \int \int_\Delta f(x, y)dxdy$.*

On voit qu'on peut décrire le triangle de deux manières : $\Delta = \{(x, y) \ / \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq x \ \} = \{(x, y) \ / \ 0 \leq y \leq 1, \ y \leq x \leq 1\}$

$F(x) = \int_0^x (y^3 - x^3)dy = [\frac{y^4}{4} - x^3 y]_0^x = \frac{-3x^4}{4}$ *et* $I = \int_0^1 -\frac{3x^4}{4}dx = -\frac{3}{20}$

$G(y) = \int_y^1 (y^3 - x^3)dx = [y^3 x - \frac{x^4}{4}]_y^1 = y^3 - \frac{1}{4} - \frac{3y^4}{4}$ *et* $I = \int_0^1 (y^3 - \frac{1}{4} - \frac{3y^4}{4})dy = -\frac{3}{20}$.

Contrairement à ce qu'on pourrait croire, la difficulté principale ne vient pas de l'expression de la fonction f mais bien de la description de Δ, une forme peut être notablement plus simple à utiliser que l'autre.

Un changement de variables est aussi un moyen de remplacer une description compliquée de Δ par une plus simple.

Exemple 26 *Soit le disque Δ de centre O et de rayon r, sa description cartesienne est*

$$\Delta = \{ \ M(x, y) \ / \ \ -r \leq x \leq r \ \text{ et } \ -\sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq \ \sqrt{r^2 - x^2} \ \},$$

[4] Donc sur le pavé $[0, 1] \times [0, 1]$ qui contient Δ.

on se doute que même une forme simple de f va être difficile à intégrer. En utilisant des coordonnées polaires la description devient

$$\Delta = \{ \ M(\rho, \theta) \ / \ \ 0 \leq \rho \leq r \ \textit{et} \ -\pi \leq \theta \leq \ \pi \ \} = [0, r] \times [-\pi, \pi].$$

1.2.1 Changement de variables

Avant d'aller plus loin, il faut définir ce qu'est un changement de variables. De manière évidente, c'est une application bijective φ d'une partie D de $\mathbb{R}^n$ (en fait $n = 2$ ou 3) contenant Δ dans une partie D' de $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{array}{l} \varphi \ : \ D \to D' \\ (x_1, .., x_n) \mapsto (u_1, .., u_n) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \varphi^{-1} \ : \ D' \to D \\ (u_1, .., u_n) \mapsto (x_1, .., x_n) \end{array}$$

Il y a aussi une condition sur la différentiabilité de φ et de φ^{-1} que nous résumerons en disant que toutes les fonctions coordonnées $x_i(u_1, .., u_n)$ et $u_j(x_1, .., x_n)$ sont de classe C^1 donc différentiables. Le terme employé pour qualifier φ est celui de *difféormorphisme.*

L'image par φ de la partie à intégrer est $\Delta' = \varphi(\Delta)$, la forme de Δ' est différente de celle de Δ ce qui est souhaitable puisqu'on veut une forme plus simple. L'élément unité de mesure (d'aire ou de volume) est également transformé et sa mesure n'a pas de raison d'être égale à 1, il faut en tenir compte et c'est le rôle du *jacobien.*

Remarque 27 *Dans un repère orthonormé du plan, le calcul de l'aire d'un parallèlogramme défini par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est $|\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})|$. De même dans l'espace à trois dimensions, la mesure du volume d'un parallélépipède défini par les vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ est $|\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})|$.*

Définition 28 *On appelle déterminant jacobien ou jacobien de φ^{-1} le déterminant*

$$J(\varphi^{-1}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & . & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & . & \frac{\partial x_2}{\partial u_n} \\ . & . & . & . \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_n} & . & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

Exemple 29 $\heartsuit$*Le jacobien du passage des coordonnées cartésiennes planes vers les coordonnées polaires est*

$$J(\varphi^{-1}) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho$$

Exemple 30 ♡*Le jacobien du passage des coordonnées cartésiennes spatiales vers les coordonnées cylindriques est*

$$J(\varphi^{-1}) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

Exemple 31 ♡*Le jacobien du passage des coordonnées cartésiennes spatiales vers les coordonnées sphériques est*

$$\left|J(\varphi^{-1})\right| = \left\| \begin{matrix} \cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi \end{matrix} \right\| = \rho^2\sin\varphi$$

[5]

Proposition 32 *Soit f une fonction continue sur un ouvert D contenant l'ensemble compact Δ, soit φ un changement de variable défini sur D, soit Δ' l'image de Δ par φ :*

$$\int ..\int_{\Delta} f(x_1, .., x_n)dx_1...dx_n = \int ..\int_{\Delta'} f\circ\varphi^{-1}(u_1, .., u_n)\left|J(\varphi^{-1})\right| du_1...du_n.$$

Pour comprendre ce résultat, nous devons donner une interprétation géométrique à l'intégrale (en dimension 2) et au jacobien.Quand on écrit

$$\int\int_{\Delta} f(x,y)dxdy$$

on mesure le volume délimité par l'ensemble Δ situé sur le plan horizontal xOy et la surface Σ d'équation $z = f(x,y)$. Pour ce faire, on mesure le volume d'une "pile" de hauteur $z = f(x,y)$ dont la base est le rectangle "infinitésimal" de côté dx et dy. L'intégrale est la somme de ces éléments de volume.

Faire un changement de variable, appliquer donc la transformation φ va modifier la hauteur $z = f\circ\varphi^{-1}(u,v)$, déformer à la fois Δ, qui dévient $\Delta' = \varphi(\Delta)$ et la forme du rectangle élémentaire. Il devient un rectangle qui est engendré par les vecteurs $\overrightarrow{a} = (\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v})$ et $\overrightarrow{b} = (\frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v})$ et dont l'aire est $\left|\det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})\right| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{matrix} \right\| = \left|J(\varphi^{-1})\right|$. Il faut tenir compte de ce qui est un changement d'unité : l'aire du rectangle "élémentaire" $dxdy$ est remplacé par sa valeur dans le nouveau système d'unité : $\left|J(\varphi^{-1})\right| dudv$.

Exemple 33 *La plus grande partie des changements de variables consiste à des passsages en coordonnées polaires, sphériques ou cylindriques.*

[5] Ces résultats à connaître par coeur.
On remarquera que la valeur absolue n'a été nécessaire que pour le jacobien du passage en coordonnées sphériques.

Soit Δ le quart de disque $\Delta = \{\ M(x,y)\ /\ 0 \leq x,\ 0 \leq y$ et $x^2+y^2 \leq 1\}$ et la fonction $f(x,y) = xy$.

$$I = \int\int_{\Delta} f(xy)dxdy = \int_0^1 (\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xydy)dx$$
$$I = \int_0^1 \frac{x}{2}(1-x^2)dx = \frac{1}{8}.$$

En passant en polaire $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$ alors $f(x,y) = \rho^2\cos\theta\sin\theta$, le quart de disque devient $\Delta' =\ M(\rho,\theta)\ /\ 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ et donc

$$I = \int\int_{\Delta'} \rho^2\cos\theta\sin\theta.\rho d\rho d\theta = \int_0^1 (\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3\sin\theta\cos\theta d\theta)d\rho$$

même si on ne remarque pas que cette intégrale est le produit de deux intégrales, le calcul est facile :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{2}\rho^3 d\rho = \frac{1}{8}.$$

Exemple 34 *Une fonction sympathique à intégrer est $f(x,y,z) = 1$ car $\int\int\int_{\Delta} 1dxdydz$ donne une mesure du volume de Δ. Voyons ce qui ce calcul donne pour une boule $B_{(O,r)}$ dont le volume bien connu mais jamais calculé pendant vos études antérieures est $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.*

$$\Delta = B_{(O,r)} = \{\ M(x,y,z)\ /\ x^2+y^2+z^2 \leq r^2\}$$
$$\Delta = \{\ M(x,y,z)\ /\ -r \leq x \leq r,\ -\sqrt{r^2-x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2-x^2}$$
$$\text{et } -\sqrt{r^2-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{r^2-x^2-y^2}\}$$

$$V = \int\int\int_{\Delta} 1dxdydz = \int_{-r}^{r} (\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} (\int_{-\sqrt{r^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} 1dz)dy)dx$$
$$V = \int_{-r}^{r} (\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} 2\sqrt{r^2-x^2-y^2}dy)dx.$$

L'intégrale $\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} 2\sqrt{r^2-x^2-y^2}dy$ ne se calcule pas facilement, la méthode standard consiste à poser $a = \sqrt{r^2-x^2}$ et $y = a\sin u$ ce qui donne

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2a^2\cos^2 udu = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2(1+\cos 2u)du = \pi a^2.$$

On revient à

$$V = \int_{-r}^{r} \pi(r^2-x^2)dx = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Cette méthode est un peu longue, voyons ce qui donne un changement de variable :

$$x = \rho \cos\theta \sin\varphi$$
$$y = \rho \sin\theta \sin\varphi$$
$$z = \rho \cos\varphi$$

alors

$$\Delta = \{\ M(\rho, \theta, \varphi)\ /\ 0 \leq \rho \leq r,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\ \textit{et}\ 0 \leq \varphi \leq \pi\},$$

en coordonnées sphériques, la boule est un pavé.

$$V = \int_0^r (\int_0^{2\pi} (\int_0^{\pi} 1\rho^2 \sin\varphi d\varphi) d\theta) d\rho =$$
$$V = 2\pi. \int_0^r \rho^2 d\rho. \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi = 2\pi.\frac{r^3}{3}.2 = \frac{4}{3}\pi r^3!$$

2 Equations différentielles :

2.1 Généralités

Définition 35 *On appelle équation différentielle une expression de la forme*

$$E: \ F(x, y, y', ..., y^{(p)}) = 0$$

où F est une fonction de $p+2$ variables $x, y, y', ..., y^{(p)}$. Le nombre p est l'ordre de l'équation différentielle. Un fonction f définie et p fois dérivable sur un intervalle I est une solution de E si et seulement si pour tout x de I on a

$$F(x, f(x), f'(x), ..., f^{(p)}(x)) = 0.$$

Exemple 36 *L'équation $(x^2-1)y' - y = 0$ admet comme solution f telle que $f(x) = C\sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|}$ sur chacun des trois intervalles $I_1 =]-\infty, -1[, I_2 =]-1, 1[$ et $I_3 =]1, +\infty[$. On le vérifie facilement $f'(x) = C\frac{1}{x^2-1}\sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|}$ sur chaque intervalle. Au passage, on remarquera qu'on ne peut pas obtenir de solution sur des intervalles plus grand car si on peut aisément prolonger f en 1, ce n'est pas le cas de f'.*

En général, on est incapable de trouver la solution d'une équation différentielle même si on a d'excellents théorèmes d'existence de solutions. Ces théorèmes sont importants en théorie comme en pratique car il permettent d'envisager une résolution numérique approchée qui, dans bien des cas, est suffisante.

2.2 Les équations linéaires du premier ordre.

Définition 37 *Une équation différentielle linéaire du premier ordre est de la forme*

$$E: \ a(x)y' + b(x)y = c(x),$$

où a, b et c sont trois fonctions continues sur un (ou des) intervalle I sur lequel $a(x) \neq 0$. Si $c = 0$ l'équation est dite linéaire homogène.

Exemple 38

$$(x^2-1)y' - y = 0$$

ici $a(x) = x^2 - 1$ qui est continue et non nulle sur les intervalles I_1, I et I_3, $b(x) = -1$ et $c(x) = 0$.

Définition 39 *Si*

$$E: \ a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

est une équation linéaire, l'équation

$$H: \ a(x)y' + b(x)y = 0$$

est appelée son équation linéaire homogène associée.

Proposition 40 *Si*

$$H: \quad a(x)y' + b(x)y = 0$$

est une équation différentielle linéaire homogène et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tel que si $x \in I$, $a(x) \neq 0$ alors H) admet des solutions qui sont de la forme

$$y = k\varphi(x)$$

où k est un réel et φ une solution particulière non nulle de H).

□ Si φ est une solution non nulle de H, il est évident que $k\varphi$ en est une autre quelque soit la valeur de k. Inversement si f est une solution de H :, on peut la supposer non nulle car sinon elle est de la forme $f = 0\varphi$ pour toute fonction φ. Alors on remarque que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{b(x)}{a(x)}$$

et nous pouvons déduire que

$$\ln|f(x)| = \int -\frac{b(x)}{a(x)}dx + C = g(x) + C$$

on en déduit que

$$|f(x)| = e^C e^{g(x)} \text{ puis } f(x) = \pm e^C e^{g(x)}$$

et $f(x)$ est un multiple de $\varphi(x) = e^{g(x)}$ qui est non nulle. Cette proposition nous permet de résoudre effectivement une équation linéaire. ■

Exemple 41 *Résolvons*

$$H: \ (x-1)y' - xy = 0.$$

Nous voyons que nous ne pouvons résoudre que sur $I =]-\infty, 1[$ ou sur $J =]1, +\infty[$. Posons

$$\frac{y'}{y} = \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1},$$

nous avons

$$\ln|y| = x + \ln|x-1| + C,$$

d'où

$$y = K|x-1|e^x = k(x-1)e^x,$$

le passage de K à k est possible car $(x-1)$ est de signe constant sur I et sur J.

Proposition 42 *Soit*

$$E: \ a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

une équation différentielle linéaire et soit un intervalle I sur lequel a ne s'annulle pas, on associe à E l'équation homogène

$$H: \ a(x)y' + b(x)y = 0$$

dont on admet avoir déterminé les solutions h telles que $h(x) = k\varphi(x)$. Toutes les solutions de E sont de la forme $f = p + h$ où h est une solution de H et p une fonction solution "particulière" de E).

□ Soit $f = p + h$ alors $f' = p' + h'$ et en reportant dans E) on a

$$\begin{gathered} a(x)(p'(x) + h'(x)) + b(x)(p(x) + h(x)) = \\ a(x)h'(x) + b(x)h(x) + a(x)p'(x) + b(x)p(x) = 0 + c(x). \end{gathered}$$

Inversement, si f est une solution reportons $f - p$ dans l'équation

$$\begin{gathered} a(x)(f'(x) - p'(x)) + b(x)(f(x) - p(x)) = \\ a(x)f'(x) + b(x)f(x) - (a(x)p'(x) + b(x)p(x)) = c(x) - c(x) = 0, \end{gathered}$$

ce qui prouve que $f - p = h$ est une solution de H. ■

Il nous reste à trouver une solution particulière p de E.

Proposition 43 ***Méthode de variation de la constante :*** *Soit*

$$E: \ a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

une équation différentielle homogène et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ sur lequel $a(x)$ est non nul. Supposons que $h(x) = k\varphi(x)$ est une solution de l'équation homogène associée H), il existe une solution particulière p de E) de la forme $p(x) = k(x)\varphi(x)$.

□ Supposons que $f(x) = k(x)\varphi(x)$ alors $f'(x) = k'(x)\varphi(x)+k(x)\varphi'(x)$. Alors

$$\begin{gathered} a(x)(k'(x)\varphi(x) + k(x)\varphi'(x)) + b(x)k(x)\varphi(x) = c(x) \\ a(x)k'(x)\varphi(x) + k(x)(a(x)\varphi'(x) + b(x)\varphi(x)) = c(x) \end{gathered}$$

entraîne

$$a(x)k'(x)\varphi(x) = c(x).$$

Nous avons à résoudre

$$k'(x) = \frac{c(x)}{a(x)\varphi(x)}$$

qui est définie et continue sur I car $a(x)$ et $\varphi(x)$ sont non nuls et a, c et φ continues. On peut donc écrire

$$k(x) = \int \frac{c(x)}{a(x)\varphi(x)}dx + K$$

et

$$f(x) = \varphi(x) \int \frac{c(x)}{a(x)\varphi(x)}dx + K\varphi(x) = p(x) + h(x).$$

Notre bonheur est complet car, même si nous oublions la forme de f, le calcul nous la redonne. ■

Exemple 44 *Soit*

$$E: \ (x-1)y' - xy = e^x.$$

Nous savons déjà résoudre

$$H:\ (x-1)y' - xy = 0,$$

dont les solutions sont

$$h(x) = ke^x(x-1).$$

Posons

$$p(x) = k(x)e^x(x-1) \text{ et } p'(x) = k'(x)(x-1)e^x + k(x)e^x x.$$

En reportant nous obtenons

$$(x-1)(k'(x)(x-1)e^x + k(x)e^x x) - x(k(x)e^x(x-1)) = e^x,$$

calcul que nous pourrons nous passer de faire à chaque fois quand nous aurons bien compris ce qui se passe, et

$$(x-1)^2 e^x k'(x) + k(x)e^x((x-1)x - x(x-1)) = e^x.$$

Il reste

$$(x-1)^2 k'(x) = 1$$

et sans difficulté nous avons

$$k(x) = \frac{1}{x-1} + K,$$

qui donne

$$f(x) = e^x + Ke^x(x-1).$$

Remarque 45 *On est souvent tenté d'étendre le domaine de validité des solutions d'une équation différentielle à un intervalle plus grand que I et en particulier à réunir les intervalles d'autant que la fonction de base φ a la même forme sur chaque intervalle. Il faut être conscient que sur I_1 les solutions sont de la forme $h_1(x) = k_1\varphi(x)$, sur I_2 de la forme $h_2(x) = k_2\varphi(x)$ etc ... et que les valeurs de $k_1, k_2, ...$ sont indépendantes.*

2.3 Equations différentielles linéaires du deuxième ordre.

2.3.1 Généralités.

Définition 46 *Une équation linéaire du deuxième ordre est une expression de la forme*

$$E:\ a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x).$$

On définit les équations différentielles linéaires homogènes qui sont de la forme

$$H:\ a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0.$$

Tout comme dans le cas du premier ordre, à toute équation différentielle linéaire E, on associe une équation homogène H.

Proposition 47 *Soit*

$$H: \ a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

la solution générale de cette équation sur un intervalle ouvert I est de la forme

$$h(x) = k_1\varphi_1(x) + k_2\varphi_2(x)$$

où φ_1 et φ_2 sont deux solutions indépendantes.

□ je ne vais pas démontrer que les solutions sont toutes de la forme $k_1\varphi_1(x)+ k_2\varphi_2(x)$, mais on peut facilement vérifier que si φ_1 et φ_2 sont deux solutions, $k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2$ en est une autre.

Sur le sens de $\varphi_1$et φ_2 sont indépendantes, il existe un bon critère qui est dû à Josef Wronski, 1776 1853 mathématicien polonais. Les fonctions φ_1 et φ_2 ne doivent pas être proportionnelles pas plus que leurs dérivées φ_1' et φ_2'. Le plus simple est de calculer le déterminant

$$W(\varphi_1, \varphi_2)(\alpha) = \begin{vmatrix} \varphi_1(\alpha) & \varphi_2(\alpha) \\ \varphi_1'(\alpha) & \varphi_2'(\alpha) \end{vmatrix} = \varphi_1(\alpha)\varphi_2'(\alpha) - \varphi_1'(\alpha)\varphi_2(\alpha)$$

Ce déterminant est non nul, si φ_1 et φ_2 sont indépendantes. On choisit α dans I, le plus souvent $\alpha = 0$. ■

Exemple 48 *Prenons un exemple que vous savez résoudre :*

$$y\text{"} - 5y' + 6y = 0$$

on vous a appris qu'il y a deux solutions de base qui sont

$$\varphi_1(x) = e^{2x}$$
$$\varphi_2(x) = e^{3x}$$

le wronskien est

$$W(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{vmatrix} e^{2\alpha} & e^{3\alpha} \\ 2e^{2\alpha} & 3e^{3\alpha} \end{vmatrix} = 3e^{2\alpha}e^{3\alpha} - 2e^{2\alpha}e^{3\alpha} = e^{2\alpha}e^{3\alpha} = 1 \ si \ \alpha = 0.$$

(J'ai noté α pour que les fonctions et les dérivées soient bien apparentes.)

Il est évident que la recherche des solutions de bases est le point clé de la résolution, nous étudierons le cas où a , b et c sont des constantes et ensuite quelques cas plus généraux.

Proposition 49 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et*

$$E: \ a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$$

une équation différentielle, soit

$$H: \ a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

son équation homogène associée ; nous supposons que $h = k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2$ est une solution générale de H) sur I et que p est une solution de E). Toutes les solutions de E) sont de la forme

$$f = p + h.$$

□ Est-il besoin de faire la démonstration qui est le décalque de celle des équations du premier ordre ? Nous commençons par vérifier que $p + h$ est une solution de E, puis, en supposant que f est une solution de E, nous montrons que $f - p$ est une solution de H. ■

Remarque 50 *Si nous avons*

$$E : a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d_1(x) + d_2(x)$$

et si nous connaissons la solution générale h de

$$H : \ a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

et deux solutions particulières p_1 et p_2 respectivement de

$$E_1 : \ a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d_1(x)$$

et

$$E_2 : \ a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d_2(x)$$

alors $f = p_1 + p_2 + h$ est solution de E). Cette remarque permettra de séparer une résolution d'équation différentielle linéaire en cas plus simples.

2.3.2 Les équations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants.

Définition 51 *On appelle équation différentielles linéaire du deuxième ordre à coefficients constants une expression de la forme*

$$E : \ ay" + by' + cy = d(x)$$

$a \neq 0$.

Proposition 52 *Soit*

$$H : \ ay" + by' + cy = 0$$

une équation différentielle linéaire homogène, on lui associe son équation caractéristique

$$\Gamma : \ ap^2 + bp + c = 0.$$

- *Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, Γ admet deux solutions réelles α et β et les fonctions $\varphi_1 \ : \ \varphi_1(x) = e^{\alpha x}$ et $\varphi_2 \ : \varphi_2(x) = e^{\beta x}$ sont deux solutions indépendantes de H).*
- *Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, Γ admet une solution réelle double α et les fonctions $\varphi_1 : \varphi_1(x) = e^{\alpha x}$ et $\varphi_2 \ : \varphi_2(x) = xe^{\alpha x}$ sont deux solutions indépendantes de H).*

– *Si* $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, Γ *admet deux solutions complexes conjuguées non réelles* $\alpha + i\omega$ *et* $\alpha - i\omega$ *et les fonctions* $\varphi_1 \;:\; \varphi_1(x) = e^{\alpha x}\cos\omega x$ *et* $\varphi_2 : \varphi_2(x) = e^{\alpha x}\sin\omega x$ *sont deux solutions indépendantes de* H.

□ Ces résultats sont plus ou moins connus mais il est bon de les redémontrer. Le principe est de rechercher des solutions sous forme exponentielle $\varphi(x) = e^{px}$ alors

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$$

amène à

$$\Gamma \;: ap^2 + bp + c = 0.$$

Si nous avons des solutions réelles α et β, les fonctions $\varphi_1 \,:\, \varphi_1(x) = e^{\alpha x}$ et $\varphi_2 \,:\, \varphi_2(x) = e^{\beta x}$ sont deux solutions de H. Pour prouver leur indépendance nous calculons le wronskien en 0.

$$W(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \beta - \alpha \neq 0.$$

Si nous n'avons qu'une solution double α alors la fonction $\varphi_1 : \varphi_1(x) = e^{\alpha x}$ est solution et nous allons vérifier que $\varphi_2 : \varphi_2(x) = xe^{\alpha x}$ est une autre solution.

$$\begin{aligned} a(2\alpha + \alpha^2 x)e^{\alpha x} + b(1 + \alpha x)e^{\alpha x} + ce^{\alpha x} = \\ xe^{\alpha x}(a\alpha^2 + b\alpha + c) + e^{\alpha x}(2a\alpha + b) = 0 \end{aligned}$$

car nous savons que α est une solution double donc un zero de $2ax+b$. L'indépendance se vérifie en calculant aussi le wronskien en 0.

$$W(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Si nous avons deux solutions complexes conjuguées, nous remarquons que

$$\begin{aligned} e^{(a+i\omega)x} &= e^{\alpha x}(\cos\omega x + i\sin\omega x) \\ e^{(\alpha-i\omega)x} &= e^{\alpha x}(\cos\omega x - i\sin\omega x) \end{aligned}$$

ce qui permet de penser que $\varphi_1 : \varphi_1(x) = e^{\alpha x}\cos\omega x$ et $\varphi_2 : \varphi_2(x) = e^{\alpha x}\sin\omega x$ sont deux solutions. On le vérifie par acquis de conscience et on calcule le wronskien en 0 pour prouver l'indépendance.

$$W(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \omega \end{vmatrix} = \omega \neq 0$$

puisque les solutions sont non réelles. ■

Exemple 53 *Soit l'équation*

$$H : \; y'' + 2y' + 5y = 0$$

l'équation caractéristique est

$$\Gamma : p^2 + 2p + 5 = 0$$

de discriminant réduit $\Delta' = 1 - 5 = -4$. *Les deux solutions sont* $p = -1 + 2i$ *et* $p' = -1 - 2i$, *les solutions de base sont* $gf_1(x) = e^{-x} \cos 2x$ *et* $\varphi_2(x) = e^{-x} \sin 2x$:

$$h(x) = e^{-x}(k_1 \cos 2x + k_2 \sin 2x).$$

Finissons par la méthode de **variations des constantes** pour une équation linéaire du deuxième ordre à coefficients constants :

Proposition 54 *Soit*

$$E : \; ay'' + by' + cy = d(x)$$

une équation linéaire et supposons que $h = k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2$ *soit une solution de l'équation homogène associée, une solution particulière de* E : *est de la forme*

$$p(x) = k_1(x)\varphi_1(x) + k_2(x)\varphi_2(x)$$

avec la condition supplémentaire

$$k_1'(x)\varphi_1(x) + k_2'(x)\varphi_2(x) = 0.$$

□ Regardons ce que ça donne :

$$\begin{aligned} p(x) &= k_1(x)\varphi_1(x) + k_2(x)\varphi_2(x) \\ p'(x) &= k_1(x)\varphi_1'(x) + k_2(x)\varphi_2'(x) + (k_1'(x)\varphi_1(x) + k_2'(x)\varphi_2(x)) \\ p''(x) &= k_1(x)\varphi_1''(x) + k_2(x)\varphi_2''(x) + k_1'(x)\varphi_1'(x) + k_2'(x)\varphi_2'(x) \end{aligned}$$

en reportant dans E :

$$\begin{aligned} & a(x)(k_1'(x)\varphi_1'(x) + k_2'(x)\varphi_2'(x)) + \\ & k_1(x)(\underline{a(x)\phi_1''(x) + b(x)\phi_1'(x) + c(x)\phi_1(x)}) + \\ & k_2(x)(\underline{a(x)\phi_2''(x) + b(x)\phi_2'(x) + c(x)\phi_2(x)}) \\ & = d(x), \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} a(x)(k_1'(x)\varphi_1'(x) + k_2'(x)\varphi_2'(x)) &= d(x) \\ k_1'(x)\varphi_1(x) + k_2'(x)\varphi_2(x) &= 0 \end{aligned}$$

ce qui nous donne un système donc $k_1'(x)$ et $k_2'(x)$ sont solutions. En utilisant la méthode du pivot de Gauss, nous avons

$$\begin{aligned} k_1'(x) &= \frac{1}{(\varphi_1'\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2')(x)}(\frac{d(x)\varphi_2(x)}{a}) \\ k_2'(x) &= \frac{1}{(\varphi_1'\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2')(x)}(\frac{-d(x)\varphi_1(x)}{a}). \end{aligned}$$

Les deux solutions sont intégrables parce que continues à condition que $\varphi_1'\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2' \neq 0$ ce qui est vérifié puisque c'est le wronskien . ■

Des étudiants attentifs pourront objecter que j'ai juste utilisé le wronskien en α mais je n'ai pas la possibilité matérielle dans ce cours d'établir le fait que si le wronskien est non nul en un point α de I, il est non nul sur I.

Exemple 55 *Cette méthode s'applique bien même si un peu d'observation nous permettra d'aller plus vite. Soit donc*

$$E: \ y'' + 2y' + 5y = 4xe^{-x};$$

nous connaissons la solution générale de l'équation homogène : $h(x) = e^{-x}(k_1 \cos 2x + k_2 \sin 2x)$. *Nous avons donc*

$$\begin{aligned} p(x) &= e^{-x}(k_1(x)\cos 2x + k_2(x)\sin 2x) \\ p'(x) &= e^{-x}((-k_1(x) + 2k_2(x))\cos 2x + (-2k_1(x) - k_2(x))\sin 2x) \\ p''(x) &= e^{-x}((-3k_1(x) - 4k_2(x))\cos(2x) + (4k_1(x) - 3k_2(x))\sin(2x)) + \\ &\quad e^{-x}((-k_1'(x) + 2k_2'(x))\cos 2x + (-2k_1'(x) - k_2'(x))\sin 2x), \end{aligned}$$

avec la condition :

$$e^{-x}(k_1'(x)\cos 2x + k_2'(x)\sin 2x) = 0.$$

Reportons dans E *et faisons les simplifications :*

$$e^{-x}((-k_1'(x) + 2k_2'(x))\cos 2x + (-2k_1'(x) - k_2'(x))\sin 2x) = 4xe^{-x};$$

nous avons le système

$$\begin{cases} (-\cos 2x - 2\sin 2x)k_1'(x) + (2\cos 2x - \sin 2x)k_2'(x) = 4x \\ \cos 2x k_1'(x) + \sin 2x k_2'(x) = 0 \end{cases}$$

et en résolvant

$$\begin{cases} k_1'(x) = \frac{1}{-2} 4x \sin 2x = -2x \sin 2x \\ k_2'(x) = \frac{1}{-2}(-4x\cos 2x) = 2x\cos 2x \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} k_1(x) = \int -2x\sin 2x dx = x\cos 2x - \int \cos 2x dx \\ k_2'(x) = \int 2x\cos 2x dx = x\sin 2x - \int \sin 2x dx \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1(x) = x\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x + K_1 \\ k_2(x) = x\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + K_2 \end{cases}$$

On en déduit la solution générale

$$f(x) = e^{-x}[(x\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x)\cos 2x + (x\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x)\sin 2x + K_1\cos 2x + K_2 \sin 2x]$$

$$f(x) = e^{-x}[x + K_1\cos 2x + K_2\sin 2x].$$

2.3.3 Cas particuliers .

Je ne vais pas traiter en détail tous les cas mais indiquer les résultats.
Soit une équation différentielle

$$E: \; ay" + by' + cy = d(x)$$

- Si $d(x)$ est un polynôme de degré n, une solution particulière $p(x)$ est un polynôme de degré n en général sauf si $c = 0$ alors $d^\circ p = n + 1$ et si $b = c = 0$ alors $d^\circ p = n + 2$.
- Si $d(x) = Ae^{rx}$ et si r n'est pas solution de l'équation caractéristique, on recherche $p(x) = Be^{rx}$.
- Si $d(x) = Ae^{\alpha x}$ avec α solution simple de l'équation caractéristique, on recherche $p(x) = Bxe^{\alpha x}$.
- Si $d(x) = Ae^{\alpha x}$ avec α solution double de l'équation caractéristique, on recherche $p(x) = Bx^2e^{\alpha x}$.
- Si $d(x) = A(x)e^{rx}$ avec $A(x)$ polynôme de degré n et si r n'est pas solution de l'équation caractéristique, on recherche $p(x) = B(x)e^{rx}$ avec $d^\circ B = n$.
- Si $d(x) = A(x)e^{\alpha x}$avec $A(x)$ polynôme de degré n et si α est solution simple de l'équation caractéristique, on recherche $p(x) = B(x)xe^{\alpha x}$.où B est un polynôme de degré n.
- Enfin si α est solution double de l'équation caractéristique, on recherche $p(x) = B(x)x^2e^{\alpha x}$.
- Pour terminer citons le cas où $d(x) = (A\cos\theta x + B\sin\theta x)e^{\beta x}$, on recherchera la solution p sous cette forme $p(x) = (C\cos\theta x + D\sin\theta x)e^{\beta x}$ sauf si $\beta + i\theta$ est solution (forcement simple) de l'équation caractéristique auquel cas $p(x) = x(C\cos\theta x + D\sin\theta x)e^{\beta x}$.

Exemple 56 *Reprenons*

$$E)\; y'' + 2y' + 5y = 4xe^{-x}$$

nous savons que l'équation de l'équation homogène est

$$h(x) = e^{-x}(k_1\cos 2x + k_2\sin 2x)$$

et que $p(x) = B(x)e^{-x}$ *avec* $d^\circ B = 1$. *Nous posons donc* $B(x) = (mx + p)e^{-x}$ *ce qui donne*

$$(mx - 2m + p)e^{-x} + 2(-mx + m - p)e^{-x} + 5(mx + p)e^{-x} = 4xe^{-x}.$$

Simplifions et regroupons

$$4mx + 4p = 4x,$$

pas besoin d'être un génie pour dire

$$f(x) = (x + k_1\cos 2x + k_2\sin 2x)e^{-x}.$$