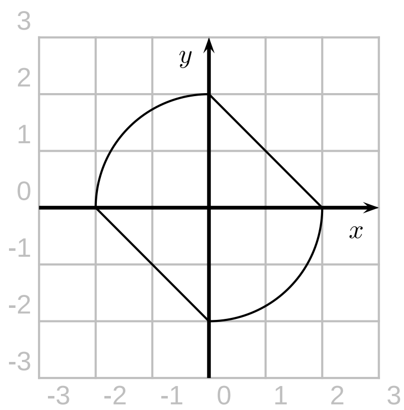
Université de Caen **Année universitaire 2007-2008**
U.F.R. Sciences

Licence 3 Mathématiques
Corrigé du devoir n ° 1

Exercice I

1. La positivité de N est claire, tout comme l'inégalité triangulaire et l'homogénéité, reste donc à étudier les cas d'annulation de N. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; la fonction $t \mapsto |tx + (1-t)y|$ étant continue et positive sur $[0,1]$, son intégrale est nulle si et seulement elle est identiquement nulle, autrement $(x,y) = 0$.

2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Quitte à multiplier (x,y) par -1, on peut supposer $x \geq y$. Si $x = y$, alors $N(x,y) \leq 1$ est équivalent à $|x| \leq 1$, supposons donc $x > y$. En faisant le changement de variable $u = tx + (1-t)y$ dans l'intégrale définissant la norme on obtient
$$N(x,y) = \frac{1}{x-y} \int_y^x |u| \, du.$$
Si x et y sont de même signe alors $N(x,y) = \left| \frac{x^2-y^2}{2(x-y)} \right| = \frac{1}{2}|x+y|$. Dans le cas contraire on a
$$\begin{aligned} N(x,y) &= \frac{1}{x-y} \left(\int_y^0 -u \, du + \int_0^x u \, du \right) \\ &= \frac{1}{x-y} \left(\left[-\frac{u^2}{2} \right]_y^0 + \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^x \right) = \frac{x^2+y^2}{2(x-y)}. \end{aligned}$$
Ainsi, $N(x,y) \leq 1$ si et seulement si (x,y) appartient à la boule de centre $(1,-1)$ et de rayon 1. Graphiquement cela donne



3. Graphiquement on a $\overline{B}_2(0,1) \subseteq \overline{B}_N(0,1) \subseteq \overline{B}_2(0,2)$, on a donc, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ les inégalités
$$\|(x,y)\|_2 \geq N(x,y) \geq \frac{1}{2}\|(x,y)\|_2.$$

Exercice II

Soit A une partie non vide d'un espace métrique (E, d). On définit le *diamètre* de A et on note $\mathrm{diam}(A)$ la borne supérieure de l'ensemble :

$$\{d(x, y) \mid x, y \in A\}.$$

1. Si A est non vide et contenu dans une boule de rayon un certain $M \in \mathbb{R}^+$, alors $\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$ est également non vide et majoré par $2M$ (inégalité triangulaire). Cette partie de $\mathbb{R}$ admet donc une borne supérieure, autrement dit $\mathrm{diam}(A)$ est bien défni.

2. Pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$ on a $d\left((\frac{1}{n}, \frac{1}{n}), (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\right) = \sqrt{2}\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \sqrt{2}$, de plus la suite

   $$\left(d\left((\frac{1}{n}, \frac{1}{n}), (1, 1)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

   converge vers cette dernière valeur, donc $\sqrt{2}$ le diamètre de ce premier ensemble.

   Pour tous f, g dans A et tout $x \in [0, 1]$ on a $-1 \leq f(x) - g(x) \leq 1$, donc $\|f - g\|_1 \leq 1$, en particulier $\mathrm{diam}(A) \leq 1$. Cette valeur est atteinte pour les fonctions constantes $x \mapsto 0$ et $x \mapsto 1$, donc $\mathrm{diam}(A) = 1$.

   Comme B est inclus dans A, son diamètre est inférieur ou égal. De plus plus si l'on note f la fonction $x \mapsto 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'élément f_n de B étant affine sur $[0, \frac{1}{n}]$ et constante sur $[\frac{1}{n}, 1]$, on a

   $$\|f - f_n\|_1 = 1 - \frac{1}{2n}$$

   donc $\mathrm{diam}(B) = 1$. Notons que cette valeur n'est pas atteinte (argument de continuité en 0).

3. Soit $s \in S \cap B(x, r)$ et $y \in S$, on a $(x, y) \leq d(x, s) + d(s, y) \leq r + r$, donc S est incluse dans la boule $B(x, 2r)$.

4. L'inégalité estr bien vraie. Soit en effet $c \in A \cap B$ et soit $u, v \in A \cup B$. Si u, v appartiennent tout deux à A ou à B, alors $d(u, v) \leq \max\{\mathrm{diam}(A), \mathrm{diam}(B)\} \leq \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B)$. On peut donc supposer $(u, v) \in A \times B$, on a alors

   $$d(u, v) \leq d(u, c) + d(c, v) \leq \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B).$$

   On obtient ainsi l'inégalité souhaitée.

Exercice III

1. Comme F est un espace vectoriel, il contient 0, ainsi l'ensemble $\{\|x - f\| \mid f \in F\}$ est non vide est minoré par 0, il admet une borne inférieur, autrement dit l'application N_f est bien définie.

   Pour montrer (a), (b) et (c), il suffit de remarquer que F étant un espace vectoriel, il contient 0 (d'où (a)), est stable par multiplication par un scalaire (d'où (b) en utilisant l'homogénéité de $\|\cdot\|$), et par addition (d'où (c)). Montrons (d). Pour tout $(x, x') \in E^2$ et tout $(f, f') \in F^2$ on a $\|x - f\| + \|x' - f'\| \geq \|x + x' - (f + f')\| \geq N_F(x + x')$. Ainsi $N_F(x) + N_F(x') \geq N_F(x + x')$.

2. Par définition N_F est la distance de x à F, ainsi $N_F(x) = 0$ si et seulement si x appartient à l'adhérence de F, qui est égale à F, celui-ci étant fermé par hypothèse. A fortiori N_F est une norme si et seulement si $F = \{0\}$.

3. L'ensemble $\{N_F(x) \mid x \in \overline{B}(0,1)\}$ est non vide (il contient 0)et d'après 1(a), il est majoré par 1. Il admet donc une borne supérieure.

   On vient de le voir, $N_F(x) = 0$ si et seulement si $x \in F$, donc $N_F(x) > 0$. Soit $\varepsilon > 0$, par définition d'une borne inférieure et puisque $\varepsilon \cdot N_F(x) > 0$, il existe $f_\varepsilon \in F$ tel que

$$N_F(x) \leq \|x - f_\varepsilon\| < N_F(x) + \varepsilon \cdot N_F(x).$$

4. Soit $x \in E \setminus F$ et $\varepsilon > 0$. D'après la question précédente et 1(b) on a

$$N_F(x) \leq \|x - f_\varepsilon\| < (1+\varepsilon)N_F(x - f_\varepsilon).$$

   En divisant par $1+\varepsilon$ et $\|x - f_\varepsilon\| \geq N_F(x) > 0$ et en utilisant 1(b) il vient

$$\frac{1}{1+\varepsilon} < N_F\left(\frac{x - f_\varepsilon}{\|x - f_\varepsilon\|}\right).$$

   On obtient en particulier pour tout $\varepsilon > 0$ l'inégalité

$$\sup\{N_F(x) \mid x \in \overline{B}(0,1)\} \geq \frac{1}{1+\varepsilon}.$$

   Il reste à faire tendre ε vers 0 pour obtenir l'égalité souhaitée.