

TRESSES

Issues d'une intuition physique naturelle, les tresses sont des objets mathématiques fascinants, qui apparaissent dans des domaines aussi divers que l'algèbre, la topologie, la géométrie, les équations différentielles, ou encore la physique théorique et la cryptographie. Assez simples pour être accessibles à l'étude, mais en même temps assez compliquées pour donner lieu à des développements intéressants, les tresses fournissent des exemples parfaits de la diversité des approches possibles d'une même notion.

On fait généralement remonter l'étude mathématique à un article écrit par Emil Artin (1898-1962) en 1926, et c'est aujourd'hui un domaine très actif, où se coïncident résultats profonds et questions ouvertes difficiles. En particulier, l'étude des tresses est directement à l'origine du remarquable renouveau de la théorie des nœuds depuis les années 1980.

1. APPROCHE ÉLÉMENTAIRE

Le début de la théorie est facile et naturel: il s'agit de dégager une notion mathématique de tresse, et de construire sur les tresses une multiplication qui en fasse un groupe.

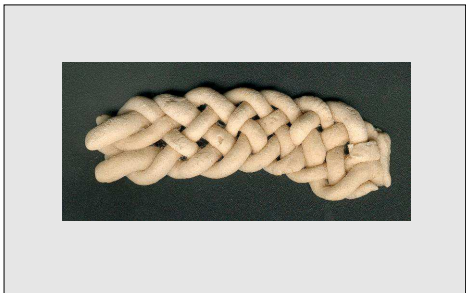
Tresses géométriques

Une tresse, ce sont des brins qui se croisent, avec la seule contrainte que les brins ne rebrousse pas chemin et conservent une même direction générale, par exemple de haut en bas, ou de gauche à droite (fig. 1).

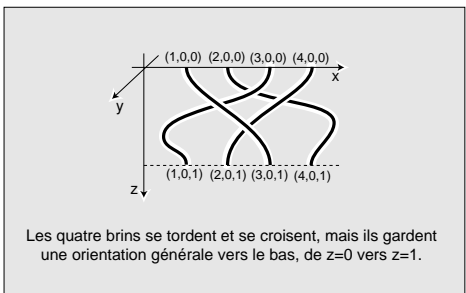
On peut modéliser une tresse à n brins comme la réunion de n courbes de \mathbb{R}^3 reliant les points $(1, 0, 0)$, \dots , $(n, 0, 0)$ aux points $(1, 0, 1)$, \dots , $(n, 0, 1)$ et coupant en n points chaque plan $z = a$ pour $0 \leq a \leq 1$ (fig. 2). Une telle figure sera appelée *tresse géométrique à n brins*.

À partir de deux tresses géométriques à n brins β_1, β_2 , on en obtient une nouvelle en plaçant β_1 au-dessus de β_2 et en comprimant la figure pour qu'elle tienne entre les plans $z = 0$ et $z = 1$. Le résultat, noté $\beta_1\beta_2$, est appelé *produit* de β_1 et β_2 (fig. 3).

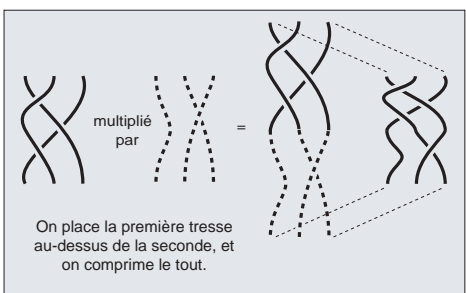
1



1. Une tresse matérielle

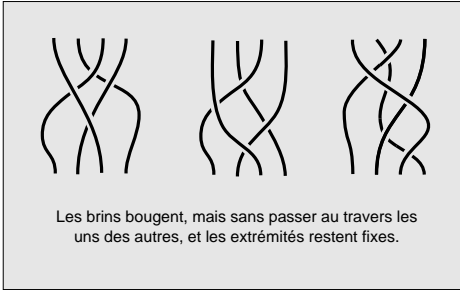


2. Une tresse géométrique

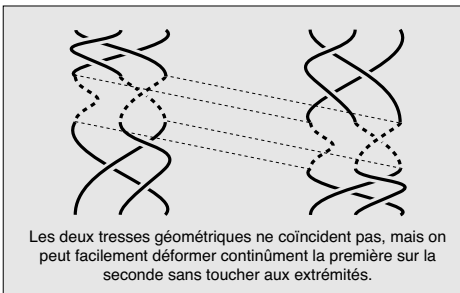


3. Produit de deux tresses géométriques

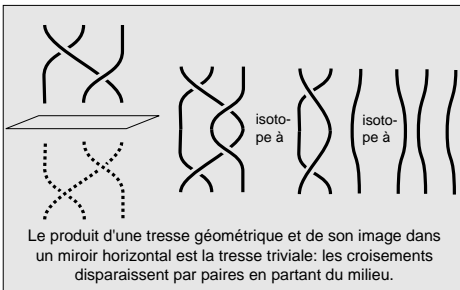
Isotopie



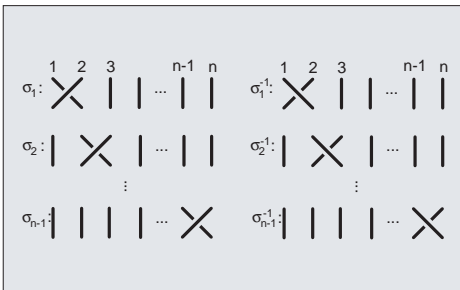
4. Tresses géométriques isotopes



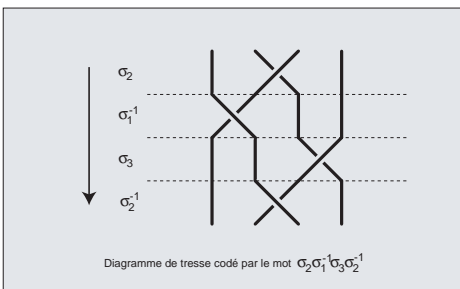
5. Associativité du produit:
 $(\beta_1\beta_2)\beta_3$ est isotope à $\beta_1(\beta_2\beta_3)$



6. Inversion d'une tresse



7. Les diagrammes σ_i et σ_i^{-1}



Si, dans une tresse matérielle souple, on bouge les brins en laissant les extrémités fixes, l'objet change, mais pas sa structure topologique, par exemple le fait que deux brins soient enroulés ou non. Ceci mène à une relation d'équivalence sur les tresses géométriques: on dit que β, β' sont *isotopes* si on peut déformer β en β' (fig. 4). On appelle alors *tresse à n brins* une classe d'équivalence de tresses géométriques à n brins vis-à-vis de l'isotopie.

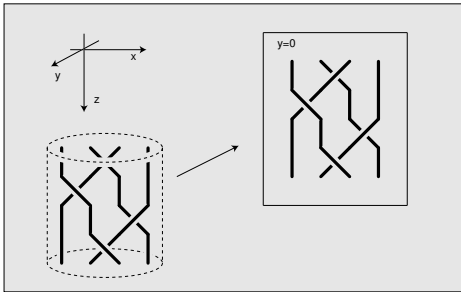
Le produit des tresses géométriques est compatible avec l'isotopie, et il induit donc un produit sur les classes d'équivalence. Celui-ci est associatif (fig. 5). Ensuite, la classe d'équivalence de la tresse géométrique ε_n composée de n segments verticaux est élément neutre, car $\beta, \beta\varepsilon_n$ et $\varepsilon_n\beta$ sont isotopes. Enfin, si $\bar{\beta}$ est l'image de β par réflexion dans le plan $z = 1/2$ (fig. 6), alors les tresses $\beta\bar{\beta}$ et $\bar{\beta}\beta$ sont isotopes à ε_n . Donc l'ensemble des tresses à n brins muni du produit défini ci-dessus est un groupe: le *groupe des tresses à n brins*, traditionnellement noté B_n , le mot anglais pour tresse étant *braid*.

Diagrammes de tresse

Une tresse est classe d'isotopie de nombreuses tresses géométriques, et il est commode d'en distinguer certaines qui sont plus simples.

Appelons *diagramme de tresse à n brins* une figure plane obtenue en empilant des motifs pris dans la liste de la fig. 7. Un tel diagramme est codé naturellement par une suite finie de lettres parmi $\sigma_1^{\pm 1}, \dots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}$, suite qu'on appelle un *mot de tresse* (fig. 8).

En projetant une tresse géométrique sur le plan $y = 0$, on obtient une figure ressemblant à un diagramme de tresse, à ceci près que les projections des brins ne sont en général pas rectilignes. Appelons *régulière* une tresse géométrique dont la projection est un diagramme de tresse (lorsqu'on interrompt les brins postérieurs aux intersections). Alors toute tresse géométrique est isotope à une tresse géométrique régulière, et deux tresses géométriques régulières ayant la même projection sont



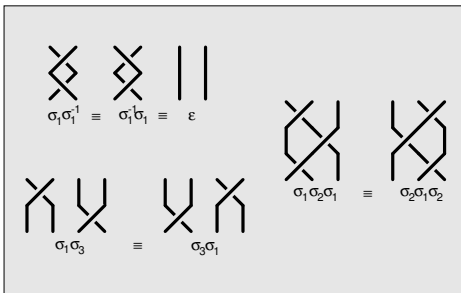
9. Projection d'une tresse géométrique régulière sur un diagramme de tresse

isotopes (fig. 9). Par conséquent, pour décrire B_n , il suffit de considérer les diagrammes de tresse ou, de façon équivalente, les mots de tresse.

Relations de tresses

Deux tresses géométriques régulières codées par le même mot sont isotopes, mais, inversement, deux mots de tresse w, w' différents peuvent coder des tresses géométriques isotopes: c'est le cas par exemple des mots $\sigma_1\sigma_3$ et $\sigma_3\sigma_1$. Dans ce cas, on notera $w \equiv w'$. Ce qu'on appelle *problème de mot* du groupe B_n , ou *problème d'isotopie* des tresses à n brins, est la question de reconnaître, partant de deux mots de tresse w, w' quelconques, si $w \equiv w'$ est vrai.

Utilisant ε comme code d'un diagramme sans croisement, il est facile de vérifier qu'on a toujours les relations suivantes, appelées *relations de tresse* (fig. 10):



10. Relations de tresse

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_i^{-1} &\equiv \sigma_i^{-1} \sigma_i \equiv \varepsilon, \\ \sigma_i \sigma_j &\equiv \sigma_j \sigma_i \text{ pour } |i - j| \geq 2, \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i &\equiv \sigma_j \sigma_i \sigma_j \text{ pour } |i - j| = 1. \end{aligned}$$

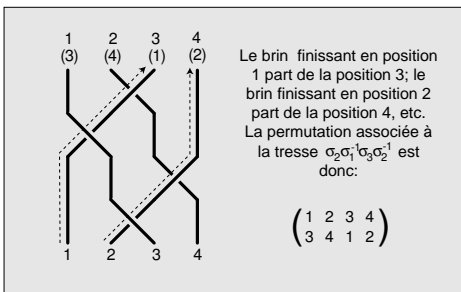
Inversement, Artin a montré — et c'est moins facile — que les relations de tresse engendrent \equiv : si w et w' représentent la même tresse, alors nécessairement on peut passer de w à w' par les seules relations de tresse.

Notons que ceci ne résout pas le problème d'isotopie tant qu'on n'a pas d'algorithme pour reconnaître si deux mots se déduisent l'un de l'autre par les relations de tresse: on reviendra sur cette question dans la suite.

Notons aussi que le cas $n = 2$ est particulier: toute tresse à 2 brins est de la forme σ_1^k , et B_2 est simplement une copie du groupe additif des nombres entiers.

Tresses et permutations

A chaque tresse géométrique β on peut associer la permutation p_β de $1, \dots, n$ telle que le brin finissant en $(i, 0, 1)$ dans β commence en $(p_\beta(i), 0, 0)$. Si β et β' sont isotopes, p_β et $p_{\beta'}$ coïncident: on obtient donc ainsi une application bien définie du groupe B_n dans le groupe symétrique S_n (fig. 11).



11. Permutation associée à une tresse

Il est facile de montrer que cette application est un homomorphisme surjectif mais non injectif: les tresses 1

et σ_1^2 sont distinctes mais admettent l'identité comme permutation. Ainsi, une tresse apparaît comme une permutation gardant la trace des transpositions effectuées.

Les tresses de B_n dont la permutation est l'identité sont appelées *pures*, et elles forment un sous-groupe distingué P_n de B_n dont l'indice est $n!$, c'est-à-dire que la relation « $x^{-1}y \in P_n$ » dans B_n a $n!$ classes d'équivalence.

Tresses et nœuds

En refermant les brins d'une tresse géométrique β , on obtient un entrelacs $\hat{\beta}$, c'est-à-dire un nœud à une ou plusieurs composantes, appelé *clôture* de β (fig. 12).

Tout entrelacs peut s'obtenir comme clôture d'une tresse, et deux entrelacs $\hat{\beta}, \hat{\beta}'$ sont isotopes si et seulement si on peut passer de β à β' par une suite finie de transformations appelées *mouvements de Markov* et consistant soit à remplacer une tresse γ par une tresse conjuguée $\alpha\gamma\alpha^{-1}$, soit à remplacer une tresse γ de B_n par une tresse $\gamma\sigma_n^{\pm 1}$ de B_{n+1} , ou inversement.

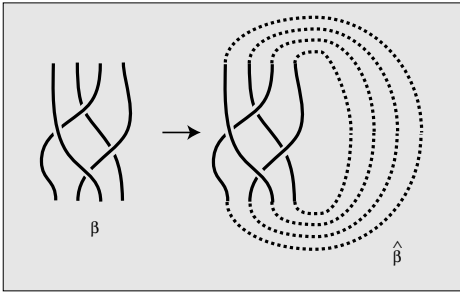
Depuis les travaux de F.A. Garside en 1967, on dispose d'un algorithme permettant de reconnaître si deux tresses sont conjuguées, mais ceci ne suffit pas à résoudre le problème de l'isotopie des nœuds, car, pour β, β' dans B_n , les tresses intermédiaires susceptibles d'apparaître dans une suite de transformations de Markov reliant $\hat{\beta}$ à $\hat{\beta}'$ peuvent appartenir à des groupes B_N avec $N > n$, sans borne *a priori* sur N .

2. UN GROUPE AUX MULTIPLES FACETTES

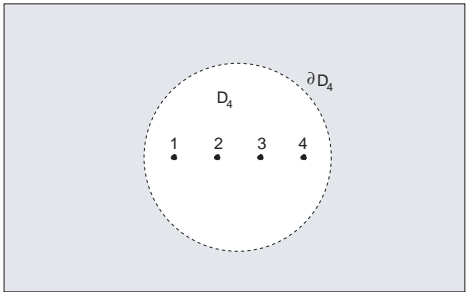
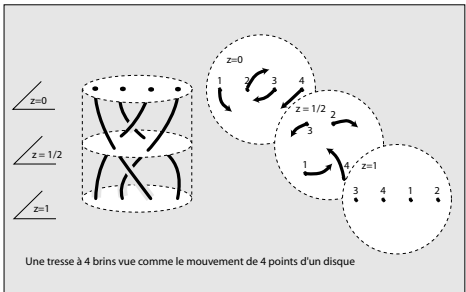
Ce qui rend les groupes de tresses spécialement intéressants est le fait que, à côté de la construction décrite ci-dessus, plusieurs autres approches *a priori* indépendantes mènent aux mêmes groupes et en révèlent des aspects complémentaires.

Groupe de difféotopies d'un disque troué

Soit D_n un disque du plan privé de n points. Les homéomorphismes de D_n dans lui-même préservant l'orientation, laissant fixe le bord extérieur ∂D_n et préservant globalement les n trous forment un groupe,



12. Clôture d'une tresse

13. Le disque D_4 14. Le groupe B_n comme groupe de difféotopies de D_n

dont le quotient par isotopie est appelé le *groupe de difféotopies* (ou, souvent, le *mapping class group*) de D_n .

Ce groupe est isomorphe au groupe des tresses B_n : l'idée de la démonstration est de regarder les tresses du dessus et non plus du devant, et de considérer une tresse à n brins comme le mouvement de n points du disque. De façon plus précise, si f est un homéomorphisme de D_n laissant ∂D_n fixe, il existe une déformation continue joignant f à l'application identité, et on obtient une tresse géométrique en suivant les images des n trous de D_n le long de la déformation; à l'inverse, une tresse géométrique spécifie un mouvement des n trous de D_n , et celui-ci se prolonge de façon unique à isotopie près en un homéomorphisme de D_n laissant le bord fixe (fig. 14).

Groupe fondamental d'un espace de configuration

Une autre façon de faire apparaître le groupe B_n est de considérer les espaces C'_n et C_n formés par les configurations ordonnées et non ordonnées de n points dans le plan, c'est-à-dire, respectivement, les suites (ordonnées) et les ensembles (non ordonnés) de n points distincts. En identifiant le plan avec l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, on voit C'_n comme l'ensemble des n -uplets (z_1, \dots, z_n) de \mathbb{C}^n vérifiant $z_i \neq z_j$ pour $i \neq j$, donc le complémentaire des hyperplans diagonaux, et C_n comme le quotient de C'_n relativement à l'action du groupe symétrique S_n par permutation des coordonnées.

Les espaces C_n et C'_n héritent de \mathbb{C}^n une topologie naturelle, et, comme à chaque espace topologique, on leur associe un groupe dit fondamental formé par les classes d'homotopie de courbes fermées tracées à partir d'un point-base fixé. Le résultat est alors que le groupe fondamental de l'espace C_n est le groupe de tresses B_n , et celui de C'_n est le groupe de tresses pures P_n .

Le passage de cette construction de B_n à la précédente est assez simple, car, pourvu qu'on se restreigne à des n -uplets (z_1, \dots, z_n) vérifiant $\|z_i\| \leq 1$, un lacet à travers l'espace C_n correspond naturellement au mouvement de n points d'un disque.

Groupe d'automorphismes d'un groupe libre

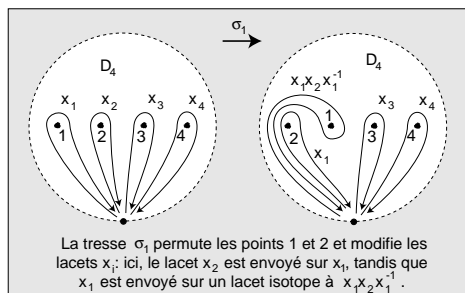
Considérons l'ensemble des mots formés à partir de $2n$ lettres $x_1, \dots, x_n, x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}$ et ne contenant aucun sous-mot $x_i x_i^{-1}$ ou $x_i^{-1} x_i$. Lorsqu'on munit cet ensemble du produit qui associe à deux mots u, v le mot obtenu en écrivant v à la suite de u et en supprimant les éventuels sous-mots $x_i x_i^{-1}$ ou $x_i^{-1} x_i$, on obtient un groupe, noté F_n , et appelé groupe libre de rang n . Ce groupe est le plus gros des groupes à n générateurs, au sens où tout groupe à n générateurs en est une image homomorphe ou, si on préfère, un quotient.

Le groupe $\text{Aut}(F_n)$ formé par tous les automorphismes de F_n est très gros, et il est usuel d'en étudier des sous-groupes. Un exemple typique est le sous-groupe de $\text{Aut}(F_n)$ formé par les automorphismes φ préservant le produit $x_1 \dots x_n$ et envoyant chaque générateur x_i sur un conjugué de $x_{f(i)}$, où f est une permutation des indices $1, \dots, n$ (dépendant de φ). On montre que ce sous-groupe est précisément le groupe de tresses B_n , obtenant ainsi une représentation injective de B_n dans $\text{Aut}(F_n)$.

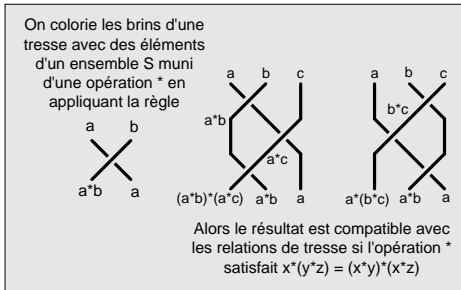
Pour le voir, on note que le groupe fondamental du disque troué D_n est isomorphe à F_n , le générateur x_i étant associé à un lacet faisant un tour autour du i -ième trou (fig. 15). Alors l'action des tresses sur D_n par homéomorphisme induit une action de B_n sur le groupe fondamental de D_n , donc sur F_n . On vérifie facilement que cette action fait correspondre à la tresse σ_i l'automorphisme de F_n qui envoie x_i sur $x_i x_{i+1} x_i^{-1}$, x_{i+1} sur x_i , et laisse x_k fixe pour $k \neq i, i+1$.

Groupes liés à l'identité d'autodistributivité

Un contexte très différent où les groupes de tresses apparaissent d'une façon *a priori* inattendue est celui de l'identité algébrique $x * (y * z) = (x * y) * (x * z)$, appelée autodistributivité (à gauche). L'étude de cette identité conduit à considérer sur un groupe G au départ quelconque des opérations du type $x * y = x s(y) a s(x)^{-1}$, avec a élément fixé et s endomorphisme de G . Alors un calcul simple montre que $*$ est autodistributive si — et, essentiellement, seulement si — les éléments



15. Action des tresses sur les générateurs du groupe fondamental de D_n et représentation d'Artin.



16. Lien entre relation de tresse et autodistributivité

$a, s(a), s(s(a)), \dots$ engendrent à l'intérieur de G une copie du groupe de tresses B_∞ .

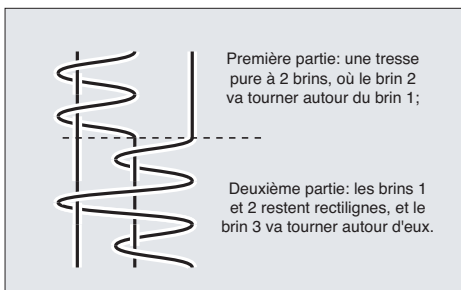
Il existe en fait de nombreux liens entre les groupes de tresses, les mouvements de Reidemeister en théorie des nœuds, et l'identité d'autodistributivité. En particulier, cette dernière apparaît naturellement lorsqu'on cherche à colorier les brins des tresses (fig. 16).

3. QUELQUES PROPRIÉTÉS DES GROUPES B_n

La multiplicité des approches vers les groupes de tresses fournit de nombreux outils pour étudier ceux-ci. Il est hors de question d'être exhaustif, et, à titre d'exemple, on mentionnera seulement quelques résultats sur la résolution du problème d'isotopie.

Peignage des tresses pures

C'est en partant directement des tresses géométriques qu'Artin a fourni la première solution au problème d'isotopie. Notons d'abord que, si les permutations associées à deux mots de tresses w, w' diffèrent, alors certainement $w \equiv w'$ est faux. On en déduit que, pour résoudre le problème d'isotopie générale, il suffit de savoir reconnaître si un mot de tresse w codant une tresse pure représente ou non la tresse triviale. L'effacement du n -ème brin dans une tresse pure à n brins fournit une tresse pure à $n - 1$ brins, et il en résulte que toute tresse pure à n brins peut s'écrire de façon unique comme le produit d'une tresse pure à $n - 1$ brins (avec un n -ème brin non tressé) et d'une tresse où le n -ème brin va faire des tours autour des $n - 1$ premiers brins qui restent rectilignes (fig. 17). Cette décomposition exprime que le groupe P_n est un produit semi-direct du groupe P_{n-1} et d'un groupe libre à $n - 1$ générateurs, et on peut en déduire une solution du problème d'isotopie, un mot de tresse pur w représentant la tresse triviale si son peignage aboutit au mot vide.



17. Peignage d'une tresse pure

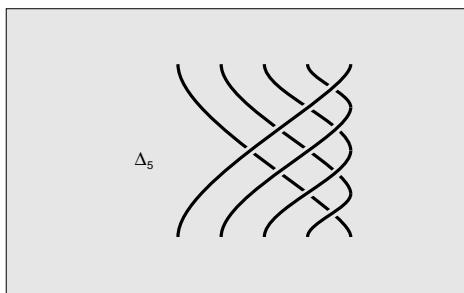
La théorie de Garside

L'étude algébrique des groupes de tresses part de la présentation d'Artin et repose sur le fait que B_n est le groupe de fractions d'un monoïde intéressant.

On a vu que le groupe B_n admet la présentation:

$$(*) \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ pour } |i-j| \geq 2, \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \text{ pour } |i-j|=1 \rangle.$$

Alors le monoïde B_n^+ de présentation (*) se plonge dans B_n et il correspond aux tresses où tous les croisements ont même orientation. De plus, B_n est groupe de fractions de B_n^+ : tout élément de B_n est quotient de deux éléments de B_n^+ . Un rôle majeur est joué par la tresse Δ_n , dont le carré engendre le centre de B_n pour $n \geq 3$ (fig. 18).



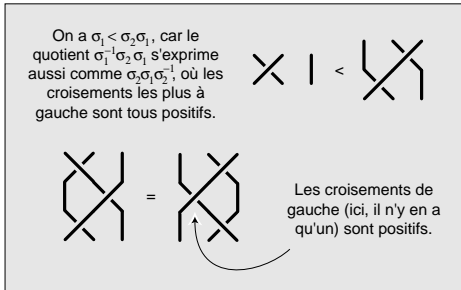
18. La tresse fondamentale Δ_n

Disons qu'une tresse b_1 *divise* une tresse b_2 s'il existe b dans B_n^+ vérifiant $b_2 = b_1 b$, et appelons *simple* toute tresse divisant Δ_n dans B_n^+ . Il existe $n!$ tresses simples à n brins, et toute tresse positive admet un diviseur simple maximal. En itérant, on obtient pour chaque tresse de B_n une unique expression $\Delta_n^k b_1 \dots b_\ell$ avec k entier relatif, b_1, \dots, b_ℓ simples distinctes de Δ_n et b_i diviseur simple maximal de $b_i b_{i+1}$ pour chaque i . De là, on déduit une solution au problème d'isotopie: partant de deux mots de tresses w, w' , on peut déterminer les expressions normales des tresses représentées par w et w' , et on a alors $w \equiv w'$ si et seulement si ces expressions coïncident. Cette méthode reflète ce qu'on appelle une structure automatique sur B_n , et sa complexité est quadratique: pour chaque n , il existe une constante c_n telle que le calcul de la forme normale d'un mot de tresse à n brins de ℓ lettres requière $c_n \ell^2$ étapes au plus.

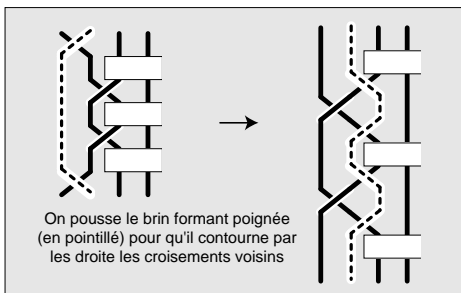
La théorie de Garside permet également de résoudre le problème de conjugaison des tresses, c'est-à-dire, étant donnés deux mots de tresse quelconques w, w' , de déterminer si les tresses représentées par w et w' sont conjuguées dans le groupe B_n .

Propriétés d'ordre

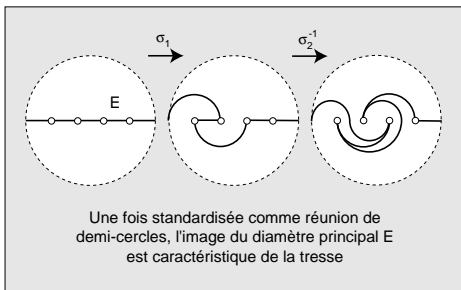
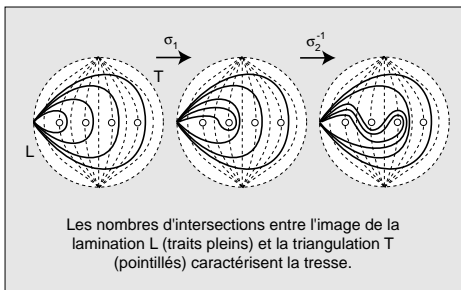
L'étude des liens entre tresses et autodistributivité mène naturellement à ordonner les tresses. Etant données deux tresses b, b' , déclarons $b < b'$ vrai si, parmi



19. Ordre sur les tresses



20. Réduction d'une poignée

21. Action sur le diamètre principal de D_n 

22. Action sur une lamination

les différents mots représentant la tresse $b^{-1}b'$, il en existe au moins un où, pour un certain i , figure la lettre σ_i , mais ni σ_i^{-1} , ni aucune lettre $\sigma_j^{\pm 1}$ avec $j < i$ (fig. 19). On montre que la relation $<$ est un ordre total sur B_n , compatible avec le produit à gauche (Dehornoy). Le groupe B_n est donc ordonnable, et il en résulte notamment que l'algèbre $\mathbb{C}B_n$ n'a pas de diviseur de 0. La restriction de l'ordre à B_n^+ est un bon ordre de type $\omega^{\omega^{n-2}}$.

Une application est la solution suivante du problème d'isotopie, très efficace en pratique. Appelons *poignée* d'un mot de tresse un sous-mot $\sigma_i^e w \sigma_i^{-e}$ avec $e = \pm 1$ et w ne contenant pas à la fois σ_{i+1} et σ_{i+1}^{-1} , ni aucun $\sigma_j^{\pm 1}$ avec $j \leq i$, et *réduction* de cette poignée l'effacement de $\sigma_i^{\pm e}$ et le remplacement de chaque $\sigma_{i+1}^{\pm 1}$ par $\sigma_{i+1}^{-e} \sigma_i^{\pm 1} \sigma_{i+1}^e$ (fig. 20). Alors toute suite de réductions est finie, et, étant donnés deux mots de tresse w, w' quelconques, la relation $w \equiv w'$ est vraie si et seulement si le mot $w^{-1}w'$ se réduit au mot vide.

Techniques géométriques

L'approche géométrique consistant à réaliser le groupe B_n comme groupe de difféotopies d'un disque troué permet d'utiliser des techniques très différentes. On obtient en particulier de nouvelles formes normales pour les tresses, et, de là, de nouvelles solutions au problème d'isotopie. Par exemple, on peut montrer qu'un homéomorphisme de D_n est déterminé par l'image du diamètre principal E de D_n , une fois cette image normalisée sous forme de demi-cercles (fig. 21): on a alors $w \equiv w'$ si et seulement si les images normalisées de E par les homéomorphismes codés par w et w' coïncident.

On peut aussi faire agir l'homéomorphisme sur une famille de courbes fixées (lamination), et compter les intersections avec les arêtes d'une triangulation fixée de D_n ; avec le choix de la fig. 22, Ivan Dynnikov obtient une fonction injective de B_n dans \mathbb{Z}^{2n} (qui n'est pas un morphisme), et une nouvelle solution, très efficace, au problème d'isotopie: pour des mots de tresses w, w' à n brins, $w \equiv w'$ est vrai si et seulement si la suite de $2n$ entiers associée à w coïncide avec celle associée à w' .

Propriétés dynamiques

La théorie de Nielsen–Thurston permet de décrire le comportement-limites des itérations d'un homéomorphisme du disque, donc, de façon équivalente, des puissances d'une tresse. Elle affirme qu'une tresse b qui n'est ni périodique (au sens où une puissance de b peut s'écrire Δ_n^{2k}) ni réductible (possibilité de regrouper les brins en tubes) est pseudo-Anosov: il existe deux décompositions du disque D_n en réunions de courbes disjointes (« feuillements ») $\mathcal{F}^u, \mathcal{F}^s$ telles que, parmi les différents homéomorphismes représentant b , il en existe un dont l'action soit une dilatation de rapport λ sur les courbes de \mathcal{F}^u et une contraction de rapport $1/\lambda$ sur les courbes de \mathcal{F}^s . L'itération de b concentre donc les points de plus en plus vite vers les courbes de \mathcal{F}^s .

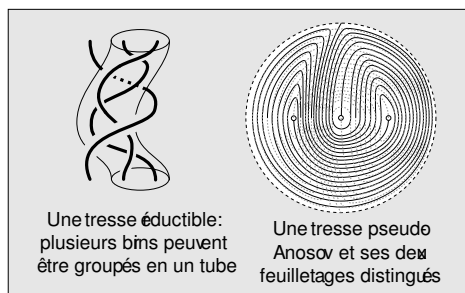
Comme application, nous ne mentionnerons pas de solution au problème d'isotopie, mais un résultat récent affirmant que, si une tresse de B_n admet une racine k -ème, alors celle-ci est unique à conjugaison près.

4. REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES

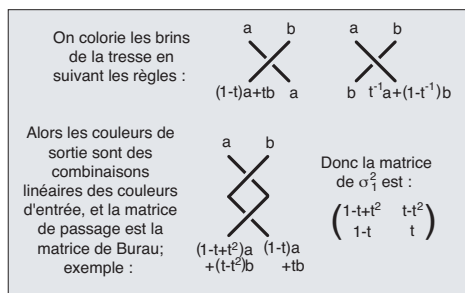
L'une des techniques les plus importantes pour mieux comprendre les groupes de tresses est l'étude de leurs représentations linéaires, c'est-à-dire l'étude des homomorphismes des groupes B_n vers des groupes de matrices. Cette étude est à l'origine de la plupart des applications en théorie des nœuds et en physique théorique.

Représentation de Burau

Découverte en 1936, cette représentation envoie le groupe B_n dans le groupe des matrices inversibles de taille n dont les coefficients sont des polynômes sur \mathbb{Z} en une variable t et son inverse. L'image de σ_i est la matrice $I_{i-1} \oplus \begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus I_{n-i-1}$, où I_k désigne la matrice-unité de taille k (fig. 24). La représentation de Burau mène au polynôme d'Alexander des nœuds, elle est fidèle (c'est-à-dire injective) pour $n = 3$, et non fidèle pour $n \geq 5$ (résultat de Stephen Bigelow, améliorant un résultat antérieur de John Moody). Le cas $n = 4$ est ouvert.



23. Classification de Nielsen–Thurston



24. Calcul de la représentation de Burau

Algèbres de Hecke

L'algèbre de Hecke $H_n(q)$ est la $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$ -algèbre associative engendrée par des générateurs e_1, \dots, e_{n-1} soumis aux relations de tresse complétées par $e_i^2 = (q-1)e_i + q$. Elle est de dimension $n!$, et on représente B_n dans $H_n(q)$ en envoyant σ_i sur e_i .

C'est en construisant une représentation de B_n par l'intermédiaire de $H_n(q)$ et en montrant son invariance par les transformations de Markov que Vaughan Jones a construit en 1984 le polynôme qui porte aujourd'hui son nom, et ouvert ainsi la voie à de nombreux développements sur les invariants des nœuds et des variétés de dimension 3, dus, entre autre, à Vladimir Turaev, Edward Witten, Maxim Kontsevich. Les représentations des groupes de tresses via les algèbres de Hecke sont également liées à l'action des algèbres de Lie sur l'espace de Fock en physique théorique.

Equation de Yang–Baxter et mécanique statistique

Si V est un espace vectoriel et R un opérateur linéaire sur $V \otimes V$, alors, notant $R_{i,i+1}$ pour $id_{i-1} \otimes R \otimes id_{n-i-1}$, il existe une représentation de B_n dans $V^{\otimes n}$ envoyant σ_i sur $R_{i,i+1}$ si et seulement si R satisfait l'équation de Yang–Baxter $R_{12}R_{23}R_{12} = R_{23}R_{12}R_{23}$. L'étude des solutions est liée à la théorie des groupes quantiques de Vladimir Drinfeld, au calcul graphique de Vladimir Turaev et aux catégories tressées d'André Joyal et R.H. Street.

En mécanique statistique, les solutions de l'équation de Yang–Baxter mènent à la résolution de certains modèles à vertex. Les échanges entre mathématiques et mécanique se font dans les deux directions: c'est par le biais de la mécanique statistique que Louis Kauffman a d'abord construit le polynôme «crochet», un autre invariant d'isotopie des nœuds.

Représentation de Lawrence–Krammer

En 2000, Daan Krammer a construit en suivant une approche algébrique une représentation de B_n dans le groupe des matrices inversibles de taille $n(n-1)/2$ dont les coefficients sont des polynômes en deux variables t, q

et leurs inverses, proche d'une représentation définie par Ruth Lawrence, et il a montré sa fidélité pour $n = 4$. Peu après, Bigelow a étendu le résultat à tout n par un argument géométrique, puis Krammer a généralisé sa propre démonstration. On sait donc désormais réaliser les groupes de tresses comme groupes de matrices.

5. EXTENSIONS, APPLICATIONS

L'aperçu précédent est loin d'être exhaustif, et il omet de nombreux aspects de l'étude des groupes de tresses: calculs d'homologie, à la suite de Vladimir Arnold, liens avec la géométrie hyperbolique *via* le revêtement universel du disque troué (théorie de Nielsen), liens avec la théorie des singularités *via* la monodromie des équations de Knizhnik–Zamolodchikov, liens avec la théorie des groupes algébriques *via* les variétés de Schubert et leur désingularisation, liens avec l'arithmétique *via* l'action sur le groupe de Galois absolu (programme de Grothendieck), etc.

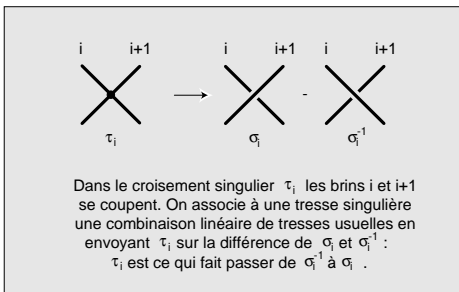
Dans cette dernière partie, nous nous bornerons à mentionner quelques généralisations des groupes de tresses, ainsi que quelques applications supplémentaires.

Généralisations des groupes de tresses

En étendant l'une ou l'autre des diverses approches qui mènent aux groupe de tresses, on obtient des généralisations naturelles.

Ainsi, partant des tresses géométriques, une extension, suggérée par les travaux de Victor Vassiliev et Mikhail Gusev (1958-1999) sur les nœuds, consiste à considérer des tresses dites singulières dans laquelle des brins peuvent avoir des intersections, ce qui revient à ajouter de nouveaux générateurs τ_i (fig. 25). Luis Paris a montré récemment qu'en envoyant τ_i sur $\sigma_i - \sigma_i^{-1}$ on obtient un plongement des tresses singulières dans les combinaisons linéaires formelles de tresses, ce qui implique que les invariants de type fini séparent les tresses.

De même, l'approche algébrique dans laquelle on considère B_n comme un relèvement sans torsion du groupe symétrique S_n a été étendue par Jacques Tits à tous les groupes de Coxeter, qui sont des groupes engendrés



25. Désingularisation d'un croisement singulier

par des réflexions d'un espace euclidien: on associe à chaque groupe de Coxeter W un groupe, dit d'Artin ou d'Artin–Tits, à l'aide d'une présentation analogue à la présentation (*) de B_n . Lorsque W est fini, la théorie de Garside reste valide, et les propriétés du groupe d'Artin–Tits associé sont semblables à celles de B_n (travaux de Pierre Deligne, Egbert Brieskorn et Kyoji Saito). Michel Broué, Gunther Malle et Raphaël Rouquier ont ensuite étendu la construction aux groupes de réflexions complexes, qui sont des généralisations naturelles des groupes de Coxeter.

De même encore, pour l'approche topologique, en remplaçant le disque troué D_n par une surface quelconque, on obtient la famille des groupes de tresses de surface, elle-même incluse dans la famille des groupes de difféotopies généraux. Ces derniers sont l'objet de nombreux travaux profonds; en particulier, ils satisfont l'alternative de Tits (Nikolai Ivanov et J.D. MacCarthy) et sont automatiques (Lee Mosher).

Enfin, l'approche par l'espace de configurations mène à la théorie des arrangements d'hyperplans et à l'étude des groupes fondamentaux de leurs complémentaires. Brieskorn et H. Van der Lek ont notamment montré que tout groupe d'Artin–Tits est groupe fondamental d'un espace lié à la réalisation du groupe de Coxeter correspondant par des réflexions.

Cryptographie

Au cours des années récentes, plusieurs systèmes cryptographiques basés sur les groupes de tresses ont été proposés (Michael Anshell & *al.*, Ki-Hyoung Ko & *al.*). L'idée est de coder l'information dans des mots de tresse, et de protéger celle-ci grâce à la difficulté de trouver, lorsque b, b' sont des tresses conjuguées, une tresse c vérifiant $b' = cbc^{-1}$. L'existence de solutions efficaces au problème d'isotopie garantit l'efficacité de tels systèmes, mais, pour le moment, on sait mal construire des tresses pour lesquelles il soit certain que le problème de conjugaison considéré est difficile, ce qui pose problème pour le choix des clés et rend le futur de ces approches encore incertain.

Physique, chimie, biologie

Outre les applications déjà mentionnées, où les groupes de tresses interviennent par le biais de leurs représentations, d'autres travaux utilisent les tresses comme langage de description et de modélisation pour des structures tressées, par exemple des trajectoires de trous magnétiques, ou des enroulements de macromolécules. Le calcul de paramètres tels que l'entropie d'une marche aléatoire dans le groupe B_n permet d'interpréter certaines propriétés des systèmes physiques.

Dans le domaine de la biologie, la double hélice de la molécule d'ADN est une tresse à deux brins, elle-même repliée dans les chromosomes avec des phénomènes de surenroulement contrôlés par des enzymes spécifiques. Les tresses et les nœuds apparaissent comme outils de modélisation naturels, et il est tentant de conjecturer que les invariants associés influent sur la cinétique de la synthèse des protéines ou leur structure spatiale.

PATRICK DEHORNOY

Bibliographie

A. SOSSINSKI, Nœuds; Seuil (1999) / C. KASSEL, Quantum groups, Springer (1995) / J. BIRMAN & A. LIBGOBER, eds., Braids; Contemp. Math. vol. 78, Amer. Math. Soc. (1988)

Corrélat

NŒUDS; GROUPES; GROUPES LINÉAIRES; SURFACES;
CRYPTOGRAPHIE; PHYSIQUE THÉORIQUE; MÉCANIQUE
STATISTIQUE