IUT Réseaux et Télécommunications
Corrigé de l'examen de Mathématiques du 7 Juin 2007

Exercice 1

On a $f(t) = 3 + e^{-5t}$. La fonction f est causale. On sait que $\mathcal{L}[f + \lambda g](p) = \mathcal{L}[f](p) + \lambda\mathcal{L}[g](p)$. Or, en regardant le tableau des transformées de Laplace, on a :

$$\mathcal{L}[3](p) = 3\mathcal{L}[1](p) = 3 \times \frac{1}{p} = \frac{3}{p}$$

$$\mathcal{L}\left[e^{-5t}\right](p) = \frac{1}{p-5}$$

Donc, par simple lecture du tableau, on a obtenu :

$$\mathcal{L}[f](p) = \frac{3}{p} + \frac{1}{p-5}$$

Exercice 2

On a une transformée de Laplace inverse à déterminer, avec $\mathcal{L}[f](p) = \frac{5p^2+23p+32}{p(p+4)^2}$. Comme à chaque fois, on commence par faire une décomposition en éléments simples.

Les racines de $p(p+4)^2$ sont 0 et -4. Et on note bien sûr que -4 est une racine double (il y a un carré !!!). *Donc les éléments simples sont dans le cas présent : $\frac{1}{p}$; $\frac{1}{p+4}$ et $\frac{1}{(p+4)^2}$*

Il faut donc déterminer les réels A, B et C tels que :

$$\frac{5p^2 + 23p + 32}{p(p+4)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+4} + \frac{C}{(p+4)^2}$$

En multipliant les deux côtés de l'égalité par $p(p+4)^2$, il vient :

$$5p^2 + 23p + 32 = A(p+4)^2 + Bp(p+4) + Cp$$

On développe ensuite le membre de droite,

$$\begin{aligned} 5p^2 + 23p + 32 &= A(p^2 + 8p + 16) + B(p^2 + 4p) + Cp \\ &= p^2(A+B) + p(8A + 4B + C) + 16A \end{aligned}$$

Puis on identifie, ce qui nous donne les équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} A + B &=& 5 \\ 8A + 4B + C &=& 23 \\ 16A &=& 32 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} B &=& 5 - A \\ 4B + C &=& 23 - 8A \\ A &=& 2 \end{array}\right.$$

On trouve donc au final :

$$\left\{\begin{array}{rcl} A &=& 2 \\ B &=& 3 \\ C &=& -5 \end{array}\right.$$

D'où l'expression :

$$\frac{5p^2 + 23p + 32}{p(p+4)^2} = \frac{2}{p} + \frac{3}{p+4} + \frac{4}{(p+4)^2}$$

On conclue l'exercice en regardant dans le tableau des transformées de Laplace et on obtient :

$$f(t) = 2\mathcal{U}(t) + 3e^{-4t} - 5te^{-4t}$$

Exercice 3

1. *On calcule le produit $A \times A$, on obtient :*

$$A^2 = \begin{bmatrix} -7 & 4 & -6 \\ 6 & -5 & -4 \\ 2 & -3 & -9 \end{bmatrix}$$

2. *On applique la règle de Sarrus, on a :*

$$\begin{aligned} \det A &= -1 - 6 + 8 - (-2 - 4 + 6) \\ &= 1 \end{aligned}$$

3. *Avec Gauss, le principe est le suivant :*
On écrit la matrice A à droite et la matrice Id à gauche :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

On effectue ensuite des oprations sur les lignes pour renverser l'écriture, c'est–à–dire qu'il faut aboutir à quelque chose du type :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & B \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right]$$

Finalement, la matrice B est la matrice A^{-1} cherchée. Voici une suite d'opérations qui fonctionne:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$L_2 - 2L_1 \to L_2 \quad \rightsquigarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$L_3 - 3L_1 \to L_3 \quad \rightsquigarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$L_3 - L_2 \to L_3 \quad \rightsquigarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$L_2 - 6L_3 \to L_2 \quad \rightsquigarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$L_1 + 2L_3 \to L_1 \quad \rightsquigarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$L_1 + L_2 \to L_1 \quad \rightsquigarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Finalement, on obtient

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 \\ 4 & 7 & -6 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. *On commence par traduire ce système sous la forme matrice $\times$ vecteur $=$ vecteur. C'est–à–dire $AX = B$, où A est une matrice et X et B sont des vecteurs. Cela nous donne:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$AX = B$ donc comme $\det A \neq 0$*, A est inversible donc A^{-1} existe (en même temps, on vient juste de calculer son inverse!!!). Donc en multipliant par A^{-1} de chaque coté, il vient: $X = A^{-1}B$. On effectue ce calcul avec les valeurs de A^{-1} et B. On trouve alors*

$$X = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Exercice 4

Pour résoudre ce système avec le pivot Gauss, on commence par l'écrire sous la forme propice à l'utilisation de cette méthode

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 13 & 1 & -17 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & 10 \end{array}\right]$$

On effectue des opérations entre les lignes pour se ramener à quelque chose de la forme:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{array}\right]$$

Puis on lit la solution dans la dernière colonne. On trouve

$$X = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$