Programmes de Master Mathématiques

Semestre 1

Algèbre

25CM +25TD

H	Contenus	Capacités attendues
	Rappels sur les anneaux, idéaux, anneaux quotients, morphismes d’anneaux, anneaux des polynômes en un nombre fini d’indéterminées	
	Anneaux principaux et euclidiens. Divisibilité dans un anneau commutatif intègre, éléments irréductibles. Anneaux factoriels, pgcd, ppcm. Factorialité de A[X] si A est factoriel. Polynômes irréductibles, cyclotomiques, Lemme de Gauss, critère d’Eisenstein.	Savoir calculer des éléments irréductibles dans un anneau commutatif intègre, dans des anneaux de polynômes par exemple.
	Corps des fractions, décomposition en éléments simples. Séries formelles à une indéterminée.	
	Polynômes homogènes et symétriques. Relations entre les coefficients et les racines d’un polynôme, sommes de Newton. Résultant et discriminant.	Savoir décomposer un polynôme symétrique en fonction de polynômes symétriques élémentaires.
	Introduction à la théorie des modules sur un anneau principal.	

Analyse 1 : Espaces de fonctions

25CM +25TD

H	Contenus	Capacités attendues
	Théorèmes de prolongement par densité sur les espaces complets.	Savoir appliquer les deux théorèmes
	Espaces L_p, inégalités de Minkowski, Hölder et Jensen. Complétude. Convolution, régularisation et approximation par convolution.	Définitions et propriétés de base Maîtriser les différents cas d’existences

	Applications aux théorèmes de densité (Féjer,...). Dualité	
	Transformation de Fourier sur $L_1(R^d)$ Lemme de Riemann-Lebesgue Exemples de calculs Lien entre régularité et décroissance. Classe de Schwartz, Théorèmes d'inversions. Transformation de Fourier sur $L_2(R^d)$. Théorème de Plancherel	Les propriétés élémentaires doivent être connues. Savoir différencier partout et presque partout.
	Espace H_0^1, dérivée au sens faible.Théorème de Lax-Milgram et application au problème de Dirichlet en dimension 1.	Courte introduction au sujet, apprivoiser la notion de dérivée faible

Probabilités

25CM +25TD

H	Contenus	Capacités attendues
	Variables et vecteurs aléatoires, loi d'une variable, loi discrète, loi absolument continue. Fonction de répartition. Densité. Formule du changement de variables avec jacobien. Indépendance d'une famille d'événements, de tribus. Tribu engendrée par une v.a., lemme de factorisation. Indépendance de variables aléatoires. Critères d'indépendance. Loi du 0-1 de Kolmogorov. Espérance et variance. Théorème de transfert. Moments. Matrice de covariance d'un vecteur L_2. Transformations exponentielles de lois : fonction caractéristique, théorème d'injectivité, formule d'inversion L1 (admise). (Transformée de Laplace d'une va positive). Fonction génératrice. Liens avec l'indépendance et la convolution, application aux sommes de variables aléatoires indépendantes.	Savoir reconnaître les lois usuelles. Avoir compris ce qu'est une mesure image. Ne pas confondre les différents types de lois (discrètes, à densité). Un exemple du type pathologique (non discret et singulier) pourrait être connu. Savoir utiliser les transformées pour identifier une loi, établir une convergence ou calculer un moment.

	Convergences de suites de variables aléatoires : en probabilité, dans L_p pour $1 \leq p \leq \infty$, presque sûrement. Cas particulier de la convergence L_2. Convergence en loi. Théorème de Portmanteau. (Théorème de Slutsky). Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Loi faible des grands nombres. Loi forte des grands nombres, applications en statistiques, Glivenko-Cantelli. Intégration numérique par Monte-Carlo. Théorèmes de P. Lévy (le second est admis), TCL, applications en statistiques. Vecteurs gaussiens.	Connaître les implications entre les convergences. Connaître des contre-exemples. Savoir choisir le bon outil pour établir une convergence en loi.

Analyse complexe

25CM +25TD

H	Contenus	Capacités attendues
	Connexité et composantes connexes.	Savoir démontrer la connexité ou non d'une région, déterminer les composantes connexes. La simple connexité est hors programme.
	Séries entières: propriétés de la somme sur son disque de convergence. Fonctions usuelles d'une variable complexe, développements en série entière, fonctions hyperboliques.	Calcul du rayon de convergence (rappels de licence). Reconnaissance de la somme dans des cas simples (séries géométriques et exponentielles, après dérivation et intégration terme-à-terme, ...). Maîtriser les opérations algébriques sur les séries, les contraintes sur le rayon de convergence d'une somme, d'un produit.
	Fonctions holomorphes, critère de Cauchy-Riemann, formules de Cauchy, analycité d'une fonction holomorphe.	Savoir déterminer si deux fonctions de deux variables réelles sont les parties réelles et imaginaires d'une fonction holomorphe. Holomorphie des fonctions usuelles.
	Principe des zéros isolés. Principe du prolongement analytique des fonctions holomorphes.	Exemples d'applications : une fonction holomorphe nulle sur l'axe réel est nulle sur C, ...

		Extension des équations fonctionnelles des fonctions usuelles au domaine complexe, cas simples du principe de réflexion.
	Principe du maximum.	Savoir décrire les fonctions entières à croissance majorée par une puissance de $\|z\|$, savoir démontrer les théorèmes de Liouville, de Gauss-d'Alembert.
	Intégration le long d'un chemin C^1 par morceaux. Primitive d'une fonction holomorphe sur un ouvert étoilé. Déterminations du logarithme. Lacets et indice.	Maîtrise des déterminations du logarithme sur C dépourvu d'une demi-droite émanant de a comme une primitive de 1/(z-a), comparaison avec la solution de exp(z)=b vue en licence, développements en série entière, primitives de fonctions de la forme f'/f, application à la construction de la racine carrée, ... Non existence d'une détermination du logarithme sur C.
	Singularités isolées, séries de Laurent, fonctions méromorphes, théorème des résidus, application au calcul d'intégrales.	Savoir déterminer la nature d'une singularité, calculer un résidu. Savoir étudier le comportement d'une intégrale lors du passage à la limite d'une famille de lacets.
	Suites et séries de fonctions holomorphes, intégrales à paramètres holomorphes.	Savoir montrer l'holomorphie de la limite par étude de l'uniformité de la convergence sur des compacts. Etude, par exemple, de la fonction Gamma sur le plan complexe.

Algorithmique

25CM +25TD

H	Contenus	Capacités attendues
	Définition, description et preuve des algorithmes	
	Exemples de types d'algorithmes et méthodes algorithmiques : gloutons, backtrack, Diviser pour régner, programmation dynamique	
	Méthodes d'analyse de la complexité, réduction, optimalité,	savoir résoudre les récurrences du type diviser pour régner

	Algorithmes de tri et permutations	
	Exemples classiques d'algorithmes mathématiques et étude de leur complexité.	

Outils informatiques

25CM +25TD

H	Contenus	Capacités attendues
	Introduction à un logiciel de calcul symbolique	Connaître les différents types d'objets (formels, numériques, graphiques). Programmer des boucles, tests conditionnels, fonctions, récursivité.
	Algorithme d'Euclide et applications	Savoir programmer diverses variantes de l'algorithme d'Euclide. L'utiliser dans divers contextes mathématiques.
	Méthode de la puissance rapide, applications en arithmétique et cryptographie	Mettre en oeuvre diverses versions de la méthode. Connaître sa complexité.

Semestre 2

Géométrie différentielle

25CM +25TD

H	Contenus	Capacités attendues
	Rappels de topologie (topologie induite sur une partie de R^n). Différentielle (composition, accroissements finis, suites et séries), Différentielle d'ordre supérieur, théorème de Schwarz Difféomorphismes. Cas des fonctions C^1.	Savoir déterminer si une fonction est différentiable et calculer la différentielle (espaces de matrices, polynômes,...)
	Inversion locale, fonctions implicites, Extremums liés et multiplicateurs de Lagrange. Application à l'étude des surfaces (Morse)	Savoir différencier local et global et appliquer les résultats

	Immersions, submersions Sous-variétés de R^n (théorème de la sous-variété), espace tangent. Reformulation des théorèmes d'inversion locale et fonctions implicites, extrémums liés sur les sous-variétés.	Comprendre les définitions et vérifier qu'une partie est une sous-variété
	Étude métrique des arcs paramétrés, abscisse curviligne, longueur, courbure.	

Analyse 2: Analyse fonctionnelle

25CM +25TD

H	Contenus	Capacités attendues
	Rudiments de topologie. Adhérence, intérieur, densité, voisinages, limites, continuité. Cas des espaces métriques, produit fini d'espaces métriques. Cas des espaces vectoriels normés, applications linéaires continues.	Manipuler les définitions de l'adhérence et de l'intérieur, manipuler la définition des ouverts et fermés dans un espace métrique. Étudier la continuité d'une application linéaire définie sur un espace de fonctions.
	Compacité : axiome de Borel-Lebesgue, compacité séquentielle. Valeurs d'adhérence, limites de sous-suites, cas métrique. Applications : théorème de Stone-Weierstrass, théorèmes de Dini, théorème de non-compacité de Riesz, théorème d'Ascoli.	Montrer rapidement qu'une partie d'un EVN de dimension finie est compacte. Appliquer le théorème de Stone-Weierstrass (exemple : fonctions sur un espace métrique produit). Appliquer les théorèmes de Dini pour des suites de fonctions explicites (exemple : $(1+x/n)^n$). Manipuler la notion d'équicontinuité et appliquer le théorème d'Ascoli (exemple : compacité des opérateurs à noyau).
	Théorèmes de Hahn-Banach. Lemme de Zorn. Jauges et convexes contenant l'origine. Théorèmes de prolongement (cas des jauges, des EVN sur R et sur C). Théorèmes de séparation large et stricte. Applications : caractérisation des sous-espaces denses, plongement d'un espace dans son bidual. Réflexivité.	Étudier sur des exemples la continuité et la norme d'une forme linéaire en dimension infinie. Montrer qu'un sous-espace est dense en utilisant les formes linéaires. Exemple d'application des théorèmes de prolongement : limites de Banach sur l^∞.
	Espaces métriques complets. Fermés emboîtés. Lemme de Baire. Applications : principe de la borne uniforme, théorème des isomorphismes	Appliquer le lemme de Baire dans des espaces concrets (exemple : points de continuité d'une limite simple, bases

	de Banach, théorème du graphe fermé.	algébriques d'un espace de Banach de dimension infinie). Appliquer le principe de la borne uniforme dans des espaces concrets (exemple : existence de fonctions continues dont la série de Fourier ne converge pas simplement). Appliquer les théorèmes de l'application ouverte et du graphe fermé sur des exemples abstraits et concrets (exemple : liens avec la notion de supplémentaire topologique).
	Applications linéaires continues entre espaces de Hilbert. Adjoint. Noyau et image de l'adjoint. Opérateurs auto-adjoints, normaux, unitaires. Projections orthogonales, isométries partielles. Opérateurs positifs. Norme et image numérique. Racine carrée d'un opérateur positif. Décomposition polaire. Spectre d'un opérateur borné, valeurs propres. Équation du résolvant. Le spectre est un compact non vide.	Manipuler les définitions de l'adjoint et des notions reliées. Calculer l'adjoint dans des espaces L_2 (exemple : opérateur à noyau, opérateur de décalage). Étudier la positivité d'un opérateur sur un espace L_2. Exemples de calcul de spectres (opérateur de multiplication, décalage unilatéral).

Groupes

25CM +25TD

H	Contenus	Capacités attendues
	Produit semi-direct de groupes. Groupe diédral	
	Groupes classiques d'automorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie : groupe général linéaire, groupe spécial linéaire; groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal; groupe unitaire, groupe spécial unitaire. Générateurs (transvections, dilatations, réflexions). Simplicité du groupe projectif linéaire.	Homomorphisme de SU(2) vers SO(3).
	Groupe des isométries laissant stable une partie du plan et de l'espace.	Savoir décrire le groupe du tétraèdre et le groupe du cube.
	Groupe des caractères d'un groupe fini. Cas d'un groupe abélien.	Savoir déterminer les caractères d'un groupe abélien fini de petit ordre.
	Représentations linéaires d'un groupe fini. Homomorphisme de représentations. Représentations irréductibles. Complète	Exemples de représentations obtenues en linéarisant une action de groupe sur un ensemble fini.

	réductibilité. Lemme de Schur. Représentation régulière.	Représentations irréductibles des groupes diédraux.
	Caractère d'une représentation linéaire. Coefficients matriciels des représentations irréductibles dans une base orthonormée invariante. Relations d'orthogonalité. Les caractères irréductibles sont une base de l'espace des fonctions centrales. Décomposition de la représentation régulière.	Savoir calculer la table des caractères d'un groupe de petit ordre. Savoir calculer la décomposition d'un caractère en irréductibles.

Extensions de corps

25CM +25TD

H	Contenus	Capacités attendues
	Éléments algébriques et transcendants. Polynôme minimal.	Savoir calculer le polynôme minimal d'un élément algébrique donné.
	Extensions de corps. Extensions finies, algébriques.	Savoir calculer le degré d'une extension finie en l'écrivant comme suite d'extensions élémentaires.
	Corps de rupture, corps de décomposition d'un polynôme. Corps algébriquement clos, clôture algébrique d'un corps (sans preuves).	Savoir calculer (additionner, multiplier, inverser) dans un corps de rupture. Ne pas confondre corps de rupture et de décomposition.
	Polynômes cyclotomiques, corps cyclotomiques.	Savoir calculer les polynômes cyclotomiques par récurrence.
	Corps finis : existence, unicité à isomorphisme près, groupe des inversibles, groupe des automorphismes.	Savoir calculer les tables de multiplication et d'addition d'un corps fini d'un ordre donné.
	Nombres constructibles à la règle et au compas. Application aux problèmes classiques.	Savoir faire les constructions géométriques correspondant aux opérations classiques (addition, multiplication, division, racine carrée).
	Théorie de Galois : définitions, théorème de correspondance.	Savoir appliquer le théorème de correspondance de Galois pour construire des extensions de corps intermédiaires.

Semestre 3

Approfondissements algèbre

25CM +25TD

H	Contenus	Capacités attendues
	Rappels sur les espaces vectoriels, familles libres, bases, dimension. Espace dual, base duale, transposée d'une application linéaire. Déterminant, orientation d'un R-espace vectoriel.	
	Vecteurs propres, sous-espaces stables, polynôme annulateur, diagonalisation (simultanée), trigonalisation, décomposition de Dunford, exponentielle d'une matrice. Endomorphismes nilpotents. Décomposition de Jordan.	
	Matrices à coefficients dans un corps, rang, changement de base, méthode du pivot et applications. Opérations matricielles et inversibilité dans un anneau commutatif.	
	Formes bilinéaires, orthogonalité, adjoint d'un endomorphisme. Groupe orthogonal, angles, endomorphismes symétriques et normaux. Groupe unitaire, endomorphismes normaux. Décomposition polaire.	
	Espace affine, barycentres, groupe affine, isométries. Isométries d'un espace affine euclidien. Coniques et quadriques.	

	Arithmétique élémentaire, congruences, l'anneau Z/nZ, théorème chinois, indicatrice d'Euler. Symbole de Legendre. Théorème des deux carrés. Equations diophantiennes	
	Groupe de permutations d'un ensemble fini : parties génératrices, simplicité de A_n.	Savoir calculer avec les permutations.
	Théorème de structure des groupes abéliens finis. Transformation de Fourier	Savoir déterminer diviseurs élémentaires et facteurs invariants de

		quelques groupes abéliens.
	Action de groupes. p-groupes. Théorèmes de Sylow. Groupe d'ordre pq	Matrices semblables, équivalentes

<u>Approfondissements analyse</u>

25CM +25TD

H	Contenus	Capacités attendues
	Analyse réelle : Fonctions monotones, fonctions convexes (continuité, régularité). Suites récurrentes. Développements asymptotiques.	
	Suite et séries de fonctions : Théorème d'approximation de Bernstein, théorème de Fejér. Théorème d'Abel, théorèmes taubériens, Théorème de Bernstein (DSE). Exemples de fonctions nulle part dérivables. Formule sommatoire de Poisson.	
	Intégrales semi-convergentes Intégrales à paramètres : Compléments sur la fonction Γ, convolution (inégalité de Young). Méthode de Laplace	
	Topologie : Sous-groupes de R, suites équiréparties, applications de Baire (fonctions nulle part dérivables, ...). Théorème du point fixe de Kakutani. Topologie des espaces matrices.	
	Espaces de Hilbert : Exemples de polynômes orthogonaux, densité. Théorème de Müntz. Opérateurs compacts.	
	Équations différentielles : Théorème de Peano-Arzela. Systèmes autonomes, études qualitatives, théorie de Lyapunov. Équation de la chaleur.	
	Distribution : Classe de Schwartz, opérations sur S. Distributions tempérées. Exemples. Dérivation au sens des distributions. Utilisation pour la résolution d'EDP.	

Calcul formel

25CM +25TD

H	Contenus	Capacités attendues
	Méthodes de factorisation des nombres entiers	
	log discret dans un groupe fini.	
	Racine carrée modulo n	
	Applications en cryptographie	
	Calcul dans un corps fini: représentation des éléments, addition, multiplication, inversion.	Savoir analyser le coût des opérations en fonction du cardinal du corps. Exemples de calcul informatique.
	Opérations sur les lignes et les colonnes des matrices, résolution de systèmes linéaires, calcul du rang, d'un déterminant.	Analyse du coût des calculs en fonction du nombre d'opérations dans le corps et de la taille de la matrice. Analyse et étude sur machine des algorithmes de base, sur les corps de caractéristique nulle et les corps finis.
	Codes correcteurs, distance de Hamming, distance minimale. Exemples: codes de répétition, codes de Hamming binaires.	Etude et mise en oeuvre d'exemples.
	Aspects algorithmiques des polynômes à une indéterminée: schéma de Horner, interpolation, relations entre les racines et les coefficients, sommes de Newton, localisation des racines.	Analyse du coût. Mise en oeuvre informatique.
	Aspects algorithmiques des polynômes à plusieurs indéterminées, polynômes symétriques, résultant, élimination. Applications à la résolution de systèmes polynomiaux, au calcul de l'intersection de courbes algébriques, au passage d'une paramétrisation à une équation implicite.	Analyse du coût. Illustration par moyen d'informatique des cas d'élimination, de calcul de l'ensemble d'intersection de deux courbes, de calcul d'une équation implicite.

Compositions écrites

15CM +35TD

H	Contenus	Capacités attendues
	Préparation aux écrits de l'agrégation	Appliquer les résultats de cours Rédiger correctement une solution avec une approche pédagogique

Semestre 4

Compléments algèbre

30CM +20TD

H	Contenus	Capacités attendues
	Préparation aux leçons d'algèbre et géométrie	Savoir présenter un plan Faire une démonstration pédagogique au tableau

Compléments analyse

30CM +20TD

H	Contenus	Capacités attendues
	Préparation aux leçons d'analyse et probabilité	Savoir présenter un plan Faire une démonstration pédagogique au tableau

Compléments modélisation

30CM +20TD

H	Contenus	Capacités attendues
	Résultants : propriétés élémentaires du résultant, défini sur un anneau commutatif. Applications : nombres algébriques, élimination de variable, intersection de courbes de R^2.	Savoir utiliser les propriétés du résultant pour résoudre des exercices concrets.
	Codes correcteurs, codes cycliques, codes de Hamming.	Comprendre les méthodes de codage et décodage ainsi que les liens entre les propriétés d'un code (distance minimale et capacité de correction par exemple)
	Localisation de racines de polynômes. Bornes sur les racines, suites de Sturm.	
	Préparation à l'épreuve de modélisation	