Sur le groupe circulaire

Bruno Deschamps

Caen, 2 septembre 2011

Résumé : L'application $x \mapsto e^{ix}$ induit un isomorphisme de groupes topologiques entre le groupe quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et le groupe circulaire $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}/\ |z| = 1\}$. Cet isomorphisme est-il spécifique à cette situation? Par exemple, qu'en est-il des groupes $\mathbb{R}^{alg}/\mathbb{Z}$ et $\mathbb{U}^{alg} = \{z \in \overline{\mathbb{Q}}/\ |z| = 1\}$, sachant que, à cause du théorème de Lindemann, l'application $x \mapsto e^{ix}$ n'envoie certainement pas $\mathbb{R}^{alg}$ sur $\mathbb{U}^{alg}$...

Dans cet exposé, nous verrons qu'en toutes généralités, si l'on considère un corps algébriquement clos C et une involution c sur C, alors il existe un isomorphisme entre les groupes $C^{<c>}/\mathbb{Z}$ et $U = \{z \in C/\ zc(z) = 1\}$. En d'autres termes, on sait toujours construire des exponentielles "algébriques" sur le corps réel clos $R = C^{<c>}$.

Une fois R et C munis de leurs topologies naturelles, la question de l'analycité de ces exponentielles est naturelle. Nous montrerons comment l'on peut construire une involution c de $\mathbb{C}$, non conjuguée à la conjugaison complexe, telle que les groupes $\mathbb{C}^{<c>}/\mathbb{Z}$ et $U = \{z \in \mathbb{C}/\ zc(z) = 1\}$ soit topologiquement isomorphes.